JAN 11
D-19

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 178

Heft 2

Ausgegeben am 10. Dezember 1937

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin W 35 und Leipzig

1937

Band 178. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Jolles, Stanislaus, Die charakteristischen Hauptachsen der einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide. . .	65
Fitting, Hans, Der Normenbegriff für die Ideale eines Ringes beliebiger Struktur	107
Weiss, E. A., Das Linienelement als singuläre Punktreihe (Zweite Mitteilung) .	123
Denk, Franz, Über die Eindeutigkeit der Zerlegung der Permutationen geordneter Elemente	127

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Die charakteristischen Hauptachsen der einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide.

Von *Stanislaus Jolles* in Berlin.

Zwei Zeitfolgen heben sich beim Aufbau der Lehre von der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 gegeneinander ab. In der ersten geht der Forscher von den ∞^2 Kongruenzstrahlen aus, in der zweiten von den ∞^3 quadratischen Regelscharen der Kongruenz. In dieser erfolgt die Entdeckung des polaren Gebüschverbandes aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades. Seine Polarität erscheint heute fast selbstverständlich. Manch einer fragt verwundert — meines Erachtens mit Unrecht — warum sich ihre Entdeckung so lange verzögerte. Es war tief schürfende Arbeit zu leisten, ehe sich die Erkenntnis Bahn brach: in der linearen Strahlenkongruenz hat erfolgreiches Arbeiten nicht mit dem Strahle, sondern mit der quadratischen Regelschar zu beginnen.

Als erster stützt v. Staudt Forschungen im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 auf die in C_1^1 enthaltenen quadratischen Regelscharen; sie mögen in C_1^1 liegen oder involutorisch in Σ_{ig}. Jahrzehnte nach ihm führt eingehendes Erfassen solcher Regelscharen zur Fokaltheorie von C_1^1. Alle grundlegenden Sätze dieser Theorie beruhen auf Eigenschaften des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1, einer beidscharig involutorischen Fläche zweiten Grades in Σ_{ig}.

Ähnlichkeiten zwischen den Fokaltheorien der linearen Strahlenkongruenz und des polaren Feldes geben Anlaß, nach einer die Fokaltheorie der Kongruenz umfassenden Polarität zu suchen. Zuerst ohne Erfolg! Endlich gelingt die Entdeckung des polaren Gebüschverbandes aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades. Zeitraubend erweist sich somit auch der Aufstieg zu dieser Polarität und mühsam. Nach erreichtem Ziele fanden sich bequemere zu ihr führende Wege. Leicht verkennt man bei ihrem Beschreiten die früheren Schwierigkeiten.

Ein tieferes Eindringen in die Eigenschaften der in der linearen Strahlenkongruenz gelegenen quadratischen Regelscharen vertieft unsere Kenntnisse von den metrisch bedingten einscharig in ihr enthaltenen Flächen zweiten Grades. So erweisen sich die Drehachsen aller Rotationsflächen im Gebüschverbande der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades als die Strahlen des gleichseitigen Fokalparaboloides von C_1^1, so ordnen sich die Paraboloide wie die gleichseitigen Hyperboloide des Gebüschverbandes zu Bündelheeren, so teilen sich seine orthogonalen Hyperboloide in das Direktorhyperboloid und zwei Büschelscharen.

Bei den Antidurchmesserflächen von C_1^1 stößt man zum ersten Male auf quadratische Flächen mit einer Hauptachse als Träger einer symmetrischen Involution von Durchmesserebenen, auf die seitdem als scheitelrecht gekennzeichneten Hyperboloide. Eine einfache Konstruktion der charakteristischen Hauptachsen aller einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide ist im Abschnitt **A** vorliegender Arbeit entwickelt. Sie ist unabhängig vom Hauptachsenkomplexe Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades F_s^2. Mit dieser Konstruktion zusammenhängende Darlegungen liefern für jeden Strahl s von Γ^2 die in ihm durch die zugehörige Fläche F_s^2 hervorgerufenen Involutionen konjugierter Punkte und Ebenen, wobei es gleichgültig ist, ob wir F_s^2 kennen. Der Forschende überschaut nunmehr mit dem Hauptachsenkomplexe Γ^2 die von den Komplexstrahlen s getragenen (reellen oder konjugiert imaginären) Scheitelpunkte- und Asymptotenebenenpaare der Flächen F_s^2.

In der Fokaltheorie ist das gleichseitige Fokalparaboloid C^2 orthogonal verknüpft mit dem Hauptachsenzylindroide C^3 der C_1^1 enthaltenden linearen Strahlenkomplexe. Hierauf fußt Abschnitt **B** unserer Untersuchung. Er klärt das Verhältnis der Paraboloide im Gebüschverbande einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades zu seinen Büschelscharen mit je einer gemeinsamen Symmetrieebene. Er klärt daran anschließend das Verhältnis dieser Paraboloide zu seinen scheitelrechten Hyperboloiden. Die charakteristischen Hauptachsen dieser Hyperboloide erweisen sich dabei als diejenigen Tangenten des Hauptachsenzylindroides C^3, die auf den mit ihren Berührungspunkten inzidenten Flächenregelstrahlen senkrecht stehen.

Als Gesamtheit erschöpfen die charakteristischen Hauptachsen aller einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide eine dem Forschen schwer zugängliche besondere quadratische Kongruenz. Die gewonnenen Ergebnisse führen zu anschaulicher Gliederung und grundlegenden Eigenschaften dieses bemerkenswerten Strahlengebildes.

Untersucht werden die hyperbolische und elliptische allgemeine lineare Strahlenkongruenz C_1^1 und die in ihnen einscharig enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide.

A. Das Eichen der Hauptachsen aller einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades.

1. Jede eigentliche Hauptachse einer Fläche zweiten Grades schneidet sie in zwei reellen getrennten oder in zwei konjugiert imaginären Scheitelpunkten. Jede uneigentliche hat mit ihr zwei reelle vereinigte Scheitelpunkte gemein. Bei einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 bilden [1]) die Hauptachsen der einscharig in ihr enthaltenen Flächen zweiten Grades einen singulären quadratischen Strahlenkomplex Γ^2. Ein gegebener Strahl s von Γ^2 ist Hauptachse einer einzigen einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiten Grades S^2. Seine beiden Schnittpunkte mit S^2 sind mit C_1^1 gegeben. Sie seien als die dem Strahle s des Komplexes durch die lineare Strahlenkongruenz C_1^1 aufgeprägten *Eichpunkte* bezeichnet. Der Komplexstrahl s hat hiernach zwei reelle getrennte oder vereinigte Eichpunkte oder zwei konjugiert imaginäre.

Eine Ausnahme bilden erstens die beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ des Komplexes Γ^2. Jede ist zugleich eine Nebensymmetrieachse von C_1^1 und daher die gemein-

[1]) S. Jolles, Die Metrik im polaren F^2-Gebüsche einer linearen Strahlenkongruenz, Math. Zeitschr. **36** (1932), Nr. 19.

same Hauptachse je eines Bündelheeres [2]) einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades; und jedes solches Bündelheer sendet durch jedes Paar gegebener mit seiner gemeinsamen Hauptachse inzidenten Kongruenzstrahlen je eine Fläche. Alle Punkte auf einer der beiden Nebensymmetrisachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ sind folglich Eichpunkte dieser Nebensymmetrieachse.

Eine weitere Ausnahme bildet der uneigentliche Strahl c_∞ von C_1^1. Es ist die Doppelpunktsgerade [3]) des einscharig in der Kongruenz enthaltenen zerfallenen Rotationsparaboloides P_∞^2 und wird folglich in jedem seiner Punkte von einer uneigentlichen Hauptachse der Fläche rechtwinklig geschnitten. Alle Punkte von c_∞ sind hiernach Paare vereinigter Scheitelpunkte von P_∞^2; jeder erweist sich als ein dem uneigentlichen Kongruenzstrahle c_∞ durch die lineare Kongruenz C_1^1 aufgeprägtes Paar vereinigter Eichpunkte.

Anders als die Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ verhält sich die Hauptsymmetrieachse c_d von Γ^2. Sie ist zugleich die Hauptsymmetrieachse von C_1^1; und als solche die gemeinsame Hauptachse einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades, nämlich der Antidurchmesserflächen [4]) der Kongruenz. Jede von ihnen schneidet c_d in demselben (reellen oder konjugiert imaginären) Punktepaare. Die Hauptsymmetrieachse c_d von Γ^2 hat demnach wie jeder gegebene Strahl von Γ^2 nur zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) durch C_1^1 ihr aufgeprägte Eichpunkte.

Die lineare Kongruenz C_1^1 prägt den Hauptachsen der einscharig in ihr enthaltenen unzerfallenen Hyperboloide zwei getrennte (reelle oder konjugiert imaginäre) Eichpunkte auf. Hingegen trägt bei den einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Hyperboloiden nur die mit einem Kongruenzstrahle vereinigte Hauptachse ein Paar solcher sie charakterisierenden Eichpunkte. Bei jeder mit einem Kongruenzstrahle nicht vereinigten Hauptachse dieser Flächen fällt das durch C_1^1 ihr aufgeprägte Paar Eichpunkte in den Schnittpunkt dieser Hauptachse mit der den Kongruenzstrahl tragenden Hauptachse.

Die eigentliche Hauptachse jedes einscharig in C_1^1 enthaltenen unzerfallenen Paraboloides hat zu dem einen ihr durch die Kongruenz aufgeprägten Eichpunkte den eigentlichen, zu dem andern den uneigentlichen Scheitelpunkt der Fläche. Das jeder der beiden uneigentlichen Hauptachsen aufgeprägte Eichpunktepaar eines solchen Paraboloides ist mit seinem uneigentlichen Scheitelpunkte vereint. Die einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Paraboloide sind bei der elliptischen linearen Kongruenz imaginär. Nur das einscharig in C_1^1 enthaltene zerfallene Rotationsparaboloid P_∞^2 hat sowohl bei der hyperbolischen wie elliptischen linearen Kongruenz einen reellen polaren Raum. Bei jedem einscharig in einer linearen Kongruenz enthaltenen zerfallenen Paraboloide mit einem eigentlichen Kongruenzstrahle als Doppelpunktsgerade ist diesem Strahle durch die Kongruenz ebenfalls ein eigentlicher und uneigentlicher Eichpunkt aufgeprägt. Je nachdem bei der hyperbolischen linearen Kongruenz der eigentliche Eichpunkt auf der Leitgerade u oder v liegt, fällt der uneigentliche auf den uneigentlichen Punkt von v oder u. Diese uneigentlichen Punkte sind auch bzw. die vereinigten Eichpunkte jeder der beiden uneigentlichen Hauptachsen eines einscharig in der hyperbolischen linearen Kongruenz enthaltenen zerfallenen Paraboloides.

---

[2]) A. a. O. [1]), Nr. 16.
[3]) A. a. O. [1]), Nr. 11.
[4]) A. a. O. [1]), Nr. 2.

Das einscharig in einer linearen Kongruenz C_1^1 enthaltene zerfallene Rotationsparaboloid P_∞^2 hat zwei Büschel paralleler Hauptachsen [3]). Die Strahlen dieser Büschel laufen bzw. zu den Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 parallel und liegen in der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1. Beide Eichpunkte jeder solchen Hauptachse sind, je nachdem diese zu $\mathfrak{c}_1$ oder $\mathfrak{c}_2$ parallel ist bzw. mit dem uneigentlichen Punkte von $\mathfrak{c}_1$ oder $\mathfrak{c}_2$ vereinigt. In diese uneigentlichen Punkte fallen auch je die beiden Eichpunkte der zwei bzw. durch diese uneigentlichen Punkte gehenden uneigentlichen Rotationsachsen von P_∞^2. Endlich sind die beiden Eichpunkte der zur Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 parallelen Hauptachsen von P_∞^2 die Schnittpunkte dieser ∞^2 Hauptachsen mit den beiden je mit ihnen inzidenten, zu den Leitgeraden u, v von C_1^1 parallelen Kongruenzstrahlen. Diese ∞^2 Paare von Eichpunkten sind bei der hyperbolischen linearen Kongruenz reell, bei der elliptischen konjugiert imaginär. Sie bilden die beiden (reellen bzw. konjugiert imaginären) Trägerebenen der beiden (reellen bzw. konjugiert imaginären) Parallelstrahlenbüschel, aus denen die in C_1^1 gelegene Regelschar von P_∞^2 besteht.

2. Bei einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 bestimmen einander das von ihren Achsenebenen umhüllte gleichseitige Fokalparaboloid C^2 und das ihm orthogonal verknüpfte [5]) Zylindroid C^3. Die Tangentenebenen beider Flächen sind wechselweise aufeinander bezogen. Jeder Achsenebene μ ist die sie rechtwinklig schneidende Tangentenebene ε von C^3 zugewiesen, und je zwei so aufeinander bezogene Ebenen μ, ε heißen ebenfalls orthogonal verknüpft [6]). Je zwei orthogonal verknüpfte Ebenen schneiden einander in einer Gerade der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1.

Es sei nun μ eine weder zu einer der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 senkrechte noch mit ihr inzidente eigentliche Achsenebene der Kongruenz; d. h. der zu μ senkrechte Kongruenzstrahl e sei mit keiner Nebensymmetrieachse der Kongruenz inzident. Die Achsenebene μ ist dann die gemeinsame Symmetrieebene [7]) einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades, deren jede eine andere zu μ senkrechte Hauptachse hat. Alle diese parallelen Hauptachsen bilden einen zur Büschelschar projektiven Büschel paralleler Strahlen. Seine μ rechtwinklig schneidende Trägerebene ε ist die μ orthogonal verknüpfte Tangentenebene von C^3. Jeder Strahl unseres in ε enthaltenen Parallelstrahlenbüschels schneidet in jedem seiner beiden Eichpunkte einen zu μ parallelen Kongruenzstrahl rechtwinklig. Die Gesamtheit dieser zu μ parallelen, also mit der uneigentlichen Gerade von μ inzidenten Kongruenzstrahlen bildet mit dem in μ gelegenen Kongruenzstrahle m eine parabolische Regelschar $\mathfrak{M}^2$ von C_1^1. Die Asymptotenebenen von $\mathfrak{M}^2$ erfüllen den durch μ gehenden Parallelebenenbüschel, während der Büschel paralleler Asymptotenebenen der Leitschar $\mathfrak{L}^2$ von $\mathfrak{M}^2$ aus dem durch die Fluchtebene γ gehenden Parallelebenenbüschel besteht. Demnach erweist sich die mit γ inzidente Schnittgerade $\mathfrak{m}$ der orthognal verknüpften Ebenen μ, ε als ein Durchmesser des Trägerparaboloides P^2 der Regelscharen $\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{L}^2$ und μ und ε als je eine seiner Durchmesserebenen. — ε ist bei der über μ getroffenen Voraussetzung keine Asymptotenebene von P^2. In ε liegt folglich eine Parabel e_ε^2 dieses Paraboloides. Sie heiße als Ort der Eichpunktepaare aller zu μ senkrechten Hauptachsen unserer Büschel-

---

[5]) S. Jolles, Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen, Math. Ann. **63** (1907), Nr. 37.

[6]) A. a. O. [1]), Nr. 23.

[7]) A. a. O. [1]), Nr. 12.

scharflächen die *Eichparabel* des von diesen Hauptachsen erfüllten Parallelstrahlenbüschels in der μ orthogonal verknüpften Tangentenebene ε des Zylindroides C^3.

In der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 liegen bekanntlich die Mittelpunkte der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades. Somit hälftet der Durchmesser $\mathfrak{m}$ des Paraboloides P^2 den Abstand der beiden Eichpunkte auf den ihn rechtwinklig schneidenden Hauptachsen unserer Büschelscharflächen. Mit ihm ist also die eigentliche Hauptachse der auf P^2 liegenden Eichparabel e_ε^2 vereinigt. Zusammengefaßt ergibt sich:

Hat eine Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades eine weder zu einer der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 senkrechte noch mit ihr inzidente eigentliche Achsenebene μ der Kongruenz zur gemeinsamen Symmetrieebene, so hat der Parallelstrahlenbüschel der zu μ senkrechten Hauptachsen der Büschelscharflächen eine Eichparabel e_ε^2. Sie liegt in der μ orthogonal verknüpften Ebene ε des dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 von C_1^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3. Und zwar ist die Parabel e_ε^2 der Schnitt von ε mit dem einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide P^2, dessen in C_1^1 gelegene Regelschar $\mathfrak{M}^2$ den Büschel durch μ gehender parallelen Ebenen zu Asymptotenebenen hat. Die Strahlen von $\mathfrak{M}^2$ sind paarweise die in C_1^1 enthaltenen zu μ parallelen getrennten, im Grenzfalle vereinigten Scheitelstrahlen der Büschelscharflächen. Zur eigentlichen Hauptachse hat die Eichparabel e_ε^2 die Schnittgerade $\mathfrak{m}$ der orthogonal verknüpften Ebenen μ, ε. Sie ist ein Durchmesser und μ und ε je eine Durchmesserebene des Paraboloides P^2.

Auf der Eichparabel e_ε^2 als Ort der Schnittpunkte von ε mit dem zu μ parallelen Kongruenzstrahlen liegt der Schnittpunkt N von ε mit dem zu ε senkrechten Kongruenzstrahl n. Dann ist nach dem vorstehenden Lehrsatze die Schnittgerade $\mathfrak{m}$ der Ebenen μ, γ die eigentliche Hauptachse von e_ε^2. Und endlich ist die in ε gelegene Hauptachse des zerfallenen Büschelscharparaboloides, das den mit μ inzidenten Kongruenzstrahl m zur Doppelpunktsgerade hat, die Scheiteltangente $\mathfrak{f}$ dieser Parabel. Die Eichparabel e_ε^2 kann aus ihrem Punkte N, ihrer eigentlichen Hauptachse $\mathfrak{m}$ und ihrer Scheiteltangente $\mathfrak{f}$ ohne weiteres konstruiert werden.

Beiläufig bemerkt, schneidet der zu ε senkrechte Kongruenzstrahl n in N rechtwinklig den mit ε inzidenten Regelstrahl $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ des mit dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3. Folglich ist der Schnittpunkt N von n mit ε zugleich der Schnittpunkt dieses Regelstrahles von C^3 mit der Eichparabel e_ε^2.

3. Bei einer Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades, die eine weder zu einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 senkrechte noch mit ihr inzidente eigentliche Achsenebene μ der Kongruenz zur gemeinsamen Symmetrieebene haben, sei e_ε^2 die Eichparabel aller zu μ senkrechten Hauptachsen der Büschelscharflächen in der μ orthogonal verknüpften Ebene ε. Die Scheiteltangente $\mathfrak{f}$ der Eichparabel e_ε^2 teilt die zu μ senkrechten Hauptachsen unserer Büschelscharflächen in zwei Arten. Die Hauptachsen der ersten Art haben mit ϵ_ε^2 ein reelles Punktepaar gemein, die der zweiten ein konjugiert imaginäres. Jene schneiden also die zugehörigen Büschelscharflächen in zwei reellen, diese in zwei konjugiert imaginären Scheitelpunkten. Nach dem Lehrsatze vorstehender Nummer gestaltet sich die Konstruktion der Paare reeller Scheitelpunkte anschaulich und übersichtlich, dagegen die Konstruktion der

Paare konjugiert imaginärer unanschaulich, unübersichtlich und sehr schwierig. Es ist daher ein gebieterisches, leider bei ähnlichen Darlegungen nur all zu häufig nicht erfülltes Erfordernis, auch für diesen Fall eine anschauliche und übersichtliche Ableitung zu liefern. Dabei werden sich in den folgenden Nummern tiefliegende, bisher nicht beachtete Eigenschaften der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades, besonders der von ihnen umfaßten Paraboloide ergeben.

4. Eine Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer, weder eine Nebensymmetrieachse von C_1^1 rechtwinklig schneidenden noch mit ihr inzidenten gemeinsamen eigentlichen Symmetrieebene μ geht durch ein Paar reeller ausgearteten Flächen [7]). Die eine hat den zu μ senkrechten Kongruenzstrahl e zur Doppelpunktsgerade, die andere den mit μ inzidenten m. Für jede der Büschelscharflächen sind diese Kongruenzstrahlen reziprok polar, und für alle besteht die von jedem der beiden Kongruenzstrahlen im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 getragene Involution aus Paaren konjugierter Elemente. Der μ rechtwinklig schneidende Kongruenzstrahl e ist inzident mit der μ orthogonal verknüpften Ebene ε. In ε liegt folglich eine zu unserer Büschelschar von Flächen zweiten Grades perspektive Büschelschar von Kegelschnitten, deren Elemente einander in jedem der beiden Doppelpunkte der von dem Kongruenzstrahle e in Σ_{ig} getragenen Punktinvolution berühren, d. h. in den Schnittpunkten von e mit den beiden Leitgeraden u, v von C_1^1. Dabei ist in jedem der beiden Schnittpunkte die gemeinsame Tangente der Kegelschnitte, die Verbindungsgerade dieses Punktes mit dem Inzidenzpunkte S des Kongruenzstrahles m mit ε. Somit ist zunächst gezeigt:

Die Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer gemeinsamen eigentlichen Symmetrieebene μ, die weder eine Nebensymmetrieachse von C_1^1 rechtwinklig schneidet noch mit ihr inzident ist, hat mit der μ orthogonal verknüpften Ebene ε gemein eine zur Büschelschar der Flächen zweiten Grades perspektive Büschelschar einander doppelt berührender Kegelschnitte. Die Kegelschnitte berühren einander in den Schnittpunkten des zu μ senkrechten Kongruenzstrahles e mit den beiden Leitgeraden u, v von C_1^1. Zu Tangenten in den zwei gemeinsamen Berührungspunkten haben die Kegelschnitte bzw. die Verbindungsgeraden dieser Punkte mit dem Schnittpunkte S des in μ gelegenen Kongruenzstrahles m und der Ebene ε. Je nachdem die lineare Kongruenz hyperbolisch oder elliptisch ist, sind die beiden Berührungspunkte und die in ihnen berührenden Tangenten reell oder konjugiert imaginär.

5. Als Schar geht die in Nummer **4** gefundene Büschelschar von Kegelschnitten durch zwei ausgeartete Kegelschnitte, nämlich durch den Doppelpunkt S und durch das durch die Punktinvolution auf dem Kongruenzstrahle e im geschart involutorischem Raume Σ_{ig} von C_1^1 dargestellte (reelle bzw. konjugiert imaginäre) Punktepaar. Die Pole einer gegebenen Gerade g auf ε für die Kegelschnitte der Büschelschar bilden also eine zur Büschelschar projektive Punktreihe erster Ordnung, die auf der Verbindungsgerade des Doppelpunktes S mit demjenigen Punkte E_2 liegt, der dem Punkte $ge = E_1$ in der von e in Σ_{ig} getragenen Punktinvolution zugeordnet ist. g kann jede von e verschiedene mit E_1 und ε inzidente Gerade sein. Schneidet — was nunmehr vorausgesetzt werde — insbesondere g rechtwinklig die zu μ senkrechten Hauptachsen a der Büschelscharkegelschnitte α^2, so schneidet die Verbindungsgerade SE_2 jede dieser Hauptachsen im Pole A_{α^2} von g für den dieser Hauptachse zugehörigen Büschelscharkegelschnitt. Wir haben dann auf jeder Hauptachse a ein Paar für den zugehörigen Büschelscharkegelschnitt α^2 konjugierter Punkte A, A_{α^2}. Ferner schneidet jede Haupt-

achse a die Fluchtebene γ von Σ_{ig} je in dem Mittelpunkte des ihr zugehörigen Büschelscharkegelschnittes α^2. Und für diese Kegelschnitte bildet der Mittelpunkt und der uneigentliche Punkt ihrer Hauptachse a ein zweites Paar konjugierter Punkte. Demnach kennen wir jetzt auf der gemeinsamen Hauptachse a jedes Büschelscharkegelschnittes α^2 und der ihn enthaltenden Büschelscharfläche A^2 die in den Polarsystemen beider gelegene Punktinvolution. Die Punktreihen $g(A\ldots)$ und $SE_2(A_{\alpha^2}\ldots)$ sind perspektiv zum Parallelstrahlenbüschel der Hauptachsen a, also projektiv zueinander. Außerdem bilden die Polaren $a_{e_\varepsilon^2}$ der Punkte A für die Eichparabel e_ε^2 des Parallelstrahlenbüschels der Hauptachsen a einen von dem Pol G_{ε^2} von g für ε^2 getragenen durch die Punktreihe $g(A\ldots)$ auf die Punktreihe $SE_2(A_{\alpha^2}\ldots)$ projektiv bezogenen Strahlenbüschel erster Ordnung $G_{e_\varepsilon^2}(a_{e_\varepsilon^2}\ldots)$. Wie aus der Definition der Eichparabel e_ε^2 folgt, tragen aber die e_ε^2 in reellen Punktepaaren schneidenden Hauptachsen a in dem polaren Felde von e_ε^2 und in dem polaren Felde des zu jeder solchen Hauptachse gehörigen Büschelscharkegelschnittes α^2 dieselbe Involution konjugierter Punkte. Folglich gehen ∞^1 und folglich alle Strahlen des Strahlenbüschels $G_{e_\varepsilon^2}(a_{e_\varepsilon^2}\ldots)$ durch die ihnen entsprechenden Punkte der zu diesem Büschel projektiven Punktreihe $SE_2(A_{\alpha^2}\ldots)$. Da g jede die Hauptachsen a rechtwinklig schneidende Gerade sein kann, so tragen hiernach auch die e_ε^2 in Paaren konjugiert imaginärer Punkte schneidenden Hauptachsen a im polaren Felde von e_ε^2 und im polaren Felde des zu jeder Hauptachse a gehörigen Büschelscharkegelschnittes α^2 dieselbe Punktinvolution.

Mit Rücksicht darauf, daß die Eichparabel e_ε^2 der Schnitt (vgl. **2**) der μ orthogonal verknüpften Ebene ε mit dem einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide P^2 ist, dessen Regelschar $\mathfrak{M}^2$ aus den in der Kongruenz gelegenen zu μ parallelen Scheitelstrahlen der Büschelscharflächen A^2 besteht, haben wir somit bewiesen:

Es sei eine eigentliche Achsenebene μ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 gegeben, die weder zu einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 senkrecht noch mit ihr inzident ist, und ferner die Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades A^2 mit der gemeinsamen Symmetrieebene μ. Dann ruft jede Büschelscharfläche A^2 auf ihrer zu μ senkrechten Hauptachse a dieselbe Involution konjugierter Punkte hervor wie die den Parallelstrahlenbüschel der Hauptachsen a eichende Parabel e_ε^2. Die auf den zu μ senkrechten Hauptachsen a je durch die Büschelscharflächen A^2 bestimmten Involutionen liegen alle im polaren Raume des Paraboloides P^2, dessen eine Regelschar $\mathfrak{M}^2$ aus den in C_1^1 enthaltenen zu μ parallelen Scheitelstrahlen der Büschelscharflächen A^2 besteht.

Wie schon in Nummer **2** bemerkt, erweist sich als Grenzfall dieser Scheitelstrahlen, d. h. der zu μ parallelen Strahlen von C_1^1, der in μ gelegene Strahl m von $\mathfrak{M}^2$.

6. Ein gegebener Strahl s des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades trägt als Hauptachse einer solchen Fläche S^2 eine Involution für S^2 konjugierter Durchmesserebenen. Die Doppelebenen dieser Involution sind die beiden von s ausgehenden (reellen oder konjugiert imaginären) Asymptotenebenen von S^2. Der Komplexstrahl s wurde in Nummer **1** durch die (reellen oder konjugiert imaginären) Doppelpunkte der durch S^2 auf ihm hervorgerufenen Involution konjugierter Punkte geeicht. Nunmehr wird er es auch durch die (reellen oder konjugiert imaginären) Doppelebenen der durch S^2 in ihm hervorgerufenen Involution konjugierter Ebenen. Dort waren jene (reellen oder konjugiert imaginären) Doppelpunkte die dem Komplexstrahle s durch die Kongruenz C_1^1 auf-

geprägten Eichpunkte, hier sind diese (reellen oder konjugiert imaginären) Doppelebenen die ihm durch die Kongruenz C_1^1 aufgeprägten *Eichebenen*.

Zwei reelle getrennte oder zusammengefallene oder zwei konjugiert imaginäre dem Komplexstrahle s durch C_1^1 aufgeprägte Eichpunkte bedingen bzw. zwei relle getrennte oder zusammengefallene oder zwei konjugiert imaginäre diesem Komplexstrahle durch C_1^1 aufgeprägte Eichebenen. Sonach lassen sich die in Nummer **1** ermittelten Ergebnisse über die den Strahlen des Hauptachsenkomplexes Γ^2 durch C_1^1 aufgeprägten Eichpunkte unschwer auf die diesen Strahlen durch C_1^1 aufgeprägten Eichebenen ausdehnen.

7. Ist eine weder zu einer Nebensymmetrieachse einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 senkrechte noch mit ihr inzidente eigentliche Achsenebene μ der Kongruenz gegeben und zugleich die Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit μ als gemeinsamer Symmetrieebene, so liefern die Nummern **2** bis **5** wichtige Sätze über die den μ rechtwinklig schneidenden Hauptachsen dieser Flächen aufgeprägten Eichpunktepaare. Den dort erhaltenen Ergebnissen stehen hier, wie die folgenden Darlegungen ergeben, ebenso wichtige Aussagen über die diesen Hauptachsen aufgeprägten Eichebenenpaare zur Seite.

8. Durch eine weder zu einer Nebensymmetrieachse einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 senkrechte noch mit ihr inzidente eigentliche Achsenebene μ dieses Gebildes ist eine Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit der gemeinsamen Symmetrieebene μ bestimmt. Bei dieser Büschelschar projiziert aus dem uneigentlichen Punkte der Normalen von μ ein parabolischer Ebenenzylinder E_ε^2 die parabolische Regelschar $\mathfrak{M}^2$, die aus den in C_1^1 gelegenen zu μ parallelen Scheitelstrahlen der Büschelscharflächen besteht (vgl. **2**). Er sendet in die zu μ senkrechte Hauptachse a jeder Büschelscharfläche das mit a inzidente Paar Asymptotenebenen der Fläche. Für unsere Büschelschar ist demnach der soeben konstruierte parabolische Ebenenzylinder der Ort aller von den zu μ senkrechten Hauptachsen a ausgehenden Eichebenen. Die μ orthogonal verknüpfte Ebene ε bedingt somit als Träger der zu μ senkrechten Hauptachsen a außer der Eichparabel e_ε^2 als Ort der durch die Hauptachsen a bedingten Eichpunktepaare (vgl. **2**) noch den parabolischen Ebenenzylinder E_ε^2 als Ort der durch diese Hauptachsen bedingten Eichebenenpaare. E_ε^2 heiße der *parabolische Eichebenenzylinder* des von ε getragenen Parallelenbüschels aller zu μ senkrechten Hauptachsen a der Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit der gemeinsamen Symmetrieebene μ.

Das Trägerparaboloid P^2 der Regelschar $\mathfrak{M}^2$ hat zum Durchmesser (vgl. **2**) die auf der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 gelegene Schnittgerade $\mathfrak{m}$ der beiden orthogonal verknüpften Ebenen μ, ε. Folglich ist der zu ε senkrechte, also zu μ parallele und demnach in $\mathfrak{M}^2$ gelegene Kongruenzstrahl n ein Scheitelstrahl von P^2, und die $\mathfrak{m}$ rechtwinklig schneidende Ebene von n die eigentliche Scheitelebene dieses Paraboloides. Durch den Schnittpunkt N von n mit ε geht aber (vgl. **2**) der zu $\mathfrak{m}$ parallele mit ε inzidente Regelstrahl $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ des mit dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3. Ferner bilden die eigentlichen Hauptachsen aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide mit zu $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ parallelen Hauptachsen einen Büschel paralleler Strahlen [8]). Seine Trägerebene ist parallel zur Fluchtebene γ und

[8]) A. a. O. [1]), Nr. 25.

geht durch den $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ rechtwinklig kreuzenden Regelstrahl $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}^n$ von C^3. Folglich ist die eigentliche Hauptachse von P^2 der mit dem Schnittpunkte des Kongruenzstrahles n und der Trägerebene inzidente Strahl unseres Parallelstrahlenbüschels und der Schnittpunkt selbst der eigentliche Scheitelpunkt dieses Paraboloides. Durch ihn geht in der eigentlichen Scheitelebene von P^2 parallel zu γ der von dem Scheitelstrahle n verschiedene zweite eigentliche Scheitelstrahl der Fläche. Der Eichebenenzylinder E_ε^2 ist aus dem uneigentlichen Punkte der Normalen von μ dem Paraboloide P^2 umbeschrieben. Er hat mit P^2 die Scheitelebene gemein; und die μ rechtwinklig schneidende mit der eigentlichen Hauptachse von P^2 inzidente Ebene ist die eigentliche Symmetrieebene von E_ε^2. Also gilt:

Eine Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades A^2 habe eine weder zu einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 senkrechte noch mit ihr inzidente eigentliche Achsenebene μ von C_1^1 zur gemeinsamen Symmetrieebene. Dann hat der von der μ orthogonal verknüpften Ebene ε getragene Parallelenbüschel der zu μ senkrechten Hauptachsen a aller Flächen A^2 einen parabolischen Eichebenenzylinder E_ε^2. Die Ebenen von E_ε^2 sind involutorisch gepaart, sobald die beiden mit den zu μ senkrechten Hauptachsen a bzw. inzidenten Eichebenen der Flächen A^2 einander zugeordnet werden. Die Involutionsebene dieser involutorischen Paarung ist ε. Der parabolische Eichebenenzylinder E_ε^2 ist dem Paraboloide P^2 umbeschrieben, dessen eine Regelschar aus den in C_1^1 gelegenen zu μ parallelen Scheitelstrahlen der Flächen A^2 besteht. P^2 und E_ε^2 haben dieselbe eigentliche Scheitelebene, und die eigentliche Symmetrieebene von E_ε^2 enthält die eigentliche Hauptachse von P^2. Diese zur Schnittgerade $\mu\varepsilon = \mathfrak{m}$ parallele Hauptachse geht durch den Inzidenzpunkt des zur Ebene ε senkrechten Kongruenzstrahles n mit der Trägerebene desjenigen Parallelenbüschels, der aus den zu $\mathfrak{m}$ parallelen Hauptachsen aller in C_1^1 einscharig enthaltenen Paraboloide besteht. Die Paraboloide haben je eine zu $\mathfrak{m}$ parallele Hauptachse.

Die Ebene ε schneidet den vom Eichebenenzylinder E_ε^2 umhüllten parabolischen Strahlenzylinder in zwei reellen Strahlen. Der eine ist der uneigentliche Strahl von ε als uneigentliche Hauptachse des Büschelscharparaboloides, der andere die mit ε inzidente Hauptachse derjenigen zerfallenen Büschelscharfläche, die den mit der Achsenebene μ inzidenten Kongruenzstrahl m zur Doppelpunktsgerade hat. Dieser Schnittstrahl fällt (vgl. **2**) auf die Scheiteltangente $\mathfrak{f}$ der Eichparabel e_ε^2 und auf den Berührungsstrahl der von ihm ausgehenden Ebene von E_ε^2. Der parabolische Eichebenenzylinder E_ε^2 ist aus dieser in ihm enthaltenen Ebene samt ihrem Berührungsstrahl $\mathfrak{f}$ und durch seine oben ermittelte eigentliche Symmetrieebene ohne weiteres zu konstruieren.

Von der Scheiteltangente $\mathfrak{f}$ der Eichparabel e_ε^2 wird die von der Schnittgerade $\mathfrak{m}$ der orthogonal verknüpften Ebenen μ, ε getragene Punktreihe so getrennt, daß der eine Teil innerhalb e_ε^2 liegt, der andere innerhalb des von dem Eichebenenzylinder E_ε^2 umhüllten parabolischen Strahlenzylinders. Den mit den Punkten jenes Teiles von $\mathfrak{m}$ inzidenten zu $\mathfrak{m}$ senkrechten Hauptachsen a unserer Büschelscharflächen sind reelle Eichpunkte- und Eichebenenpaare aufgeprägt, den mit den Punkten dieses Teiles inzidenten konjugiert imaginäre. In Nummer **5** ist das die Hauptachsen a mit einem Paare reeller oder konjugiert imaginärer Eichpunkte umfassende Gesetz entwickelt. Die folgende Nummer zeigt seine Gültigkeit auch für die Paare reeller oder konjugiert imaginärer Eichebenen.

9. Wie in der vorstehenden Nummer liegt auch hier eine Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades vor mit einer gemeinsamen eigentlichen Symmetrieebene μ. Und wiederum sei μ weder zu einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 senkrecht noch mit ihr inzident, und e_ε^2 die Eichparabel in der μ orthogonal verknüpften Tangentenebene ε des mit dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 von C_1^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3.

Die zu μ senkrechten Hauptachsen a der Flächen A^2 unserer Büschelschar schneiden die Eichparabel e_ε^2 in zwei reellen getrennten bzw. vereinigten oder in zwei konjugiert imaginären Punkten. Bei jeder in zwei reellen Punkten schneidenden Hauptachse a_r geht durch jeden der beiden Schnittpunkte ein zu μ paralleler Kongruenzstrahl. Diese zwei Kongruenzstrahlen fallen auf zwei windschiefe mit a_r inzidente Scheitelstrahlen der zu a_r gehörigen Büschelscharfläche A_r^2. Alle diese in C_1^1 gelegenen Scheitelstrahlen der Büschelscharflächen A^2 bilden aber (vgl. 2) die eine Regelschar $\mathfrak{M}^2$ eines einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloides P^2. Folglich wird von den beiden durch eine Hauptachse a_r gehenden Asymptotenebenen der ihr zugehörigen Büschelscharfläche A_r^2 nicht nur A_r^2, sondern auch das Paraboloid P^2 berührt. Beide Flächen rufen hiernach in dieser Hauptachse die gleiche Involution konjugierter Ebenen hervor. Die von der Büschelscharfläche A_r^2 in ihrer zu μ senkrechten Hauptachse a_r hervorgerufene Involution konjugierter Ebenen liegt also zugleich im polaren Raume von P^2.

Nach dem Folgenden ist dies Ergebnis unabhängig von der zu seinem Beweise erforderlichen Realität der Punktepaare, in denen die zu μ senkrechten Hauptachsen a der Büschelscharflächen A^2 die Eichparabel e_ε^2 schneiden.

Zunächst bilden für alle Büschelscharflächen A^2 die Polarebenen $\xi_\infty^{A^2}$ eines gegebenen uneigentlichen Punktes X_∞ der gemeinsamen Symmetrieebene μ einen zur Büschelschar projektiven Ebenenbüschel erster Ordnung $x(\xi_\infty^{A^2}\ldots)$. Er ist perspektiv zu dem ebenfalls zur Büschelschar projektiven Parallelenbüschel $\varepsilon(a\ldots)$ der zu μ senkrechten Hauptachsen a der Büschelscharflächen A^2. Und dieser Parallelenbüschel bezieht den Ebenenbüschel $x(\xi_\infty^{A^2}\ldots)$ projektiv auf den Parallelebenenbüschel $(\xi_\alpha\ldots)$, der von den die parallelen Hauptachsen a aus dem uneigentlichen Punkte X_∞ projizierenden Ebenen ξ_α gebildet wird. Die beiden je mit einer Hauptachse a inzidenten homologen Ebenen $\xi_\alpha, \xi_\infty^{A^2}$ sind dabei für die zur Hauptachse a gehörige Büschelscharfläche A^2 konjugiert. — Nun bilden die Pole der parallelen Ebenen ξ_α für das Paraboloid P^2, dessen eine Regelschar aus den in C_1^1 gelegenen zu μ parallelen Scheitelstrahlen der Büschelscharflächen A^2 besteht, eine zu dem Parallelebenenbüschel $(\xi_\alpha\ldots)$, und folglich auch zu dem auf ihm projektiv bezogenen Ebenenbüschel erster Ordnung $x(\xi_\infty^{A^2}\ldots)$, projektive Punktreihe erster Ordnung. Homologe Ebenen $\xi_\alpha, \xi_\infty^{A^2}$ der projektiven Ebenenbüschel $(\xi_\alpha\ldots)$ und $(\xi_\infty^{A^2}\ldots)$ sind jedoch nach obigem Beweise, sobald eine Hauptachse a ihre zugehörige Büschelscharfläche A^2 in einem reellen Punktepaar schneidet, für das Paraboloid P^2 konjugiert. Somit gehen ∞^1, und also alle Ebenen des Ebenenbüschels $x(\xi_\infty^{A^2}\ldots)$, durch die ihnen entsprechenden Punkte der zu $x(\xi_\infty^{A^2}\ldots)$ projektiven, von den Polen der Ebenen ξ_α für P^2 gebildeten Punktreihe. Hiernach sind, da X_∞ ein gegebener Punkt der uneigentlichen Gerade von μ war, je zwei konjugierte Durchmesserebenen der zu μ senkrechten Hauptachse a jeder Büschelscharfläche A^2 zugleich konjugierte Ebenen für das Paraboloid P^2. Daraus schließen wir:

Gegeben sei eine weder zu einer Nebensymmetrieachse einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 senkrechte noch mit ihr inzidente eigentliche Achsenebene μ von C_1^1, ferner die Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades A^2 mit der gemeinsamen Symmetrieebene μ und endlich das Paraboloid P^2, dessen eine Regelschar aus den in C_1^1 gelegenen, zu μ parallelen Scheitelstrahlen der Büschelscharflächen besteht. Dann trägt die μ rechtwinklig schneidende Hauptachse a jeder Büschelscharfläche A^2 — gleichgültig ob ihre Eichebenenpaare reell oder konjugiert imaginär sind — sowohl im polaren Raume der Büschelscharfläche A^2 wie in dem des Paraboloides P^2 die nämliche Involution konjugierter Ebenen.

10. Aus dem Lehrsatz der vorstehenden Nummer und dem aus Nummer **5** ergibt sich der beide umfassende

Hauptsatz. *Es sei die eigentliche Achsenebene μ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 weder zu einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 senkrecht noch mit ihr inzident, und es sei die Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades A^2 mit der gemeinsamen Symmetrieebene μ gegeben. Dann trägt die μ rechtwinklig schneidende Hauptachse a jeder Fläche A^2 — unabhängig davon ob die der Hauptachse a durch die Kongruenz aufgeprägten Eichpunkte- und Eichebenenpaare reell oder konjugiert imaginär sind — sowohl in dem polaren Raume der Büschelscharfläche A^2 wie in dem des Parabaloides P^2, dessen eine Regelschar aus den in C_1^1 gelegenen, zu μ parallelen Scheitelstrahlen der Büschelscharflächen besteht, die nämliche Punkt- und Ebeneninvolution.*

11. Dem in Nummer **10** abgeleiteten Hauptergebnisse lag eine eigentliche, weder zu einer Nebensymmetrieachse einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 senkrechte noch mit ihr inzidente Achsenebene μ von C_1^1 zugrunde. Wir wenden uns nunmehr in den Nummern **12—16** zu den zwei dort ausgeschlossenen Fällen, insbesondere in Nummer **15** und **16** zur uneigentlichen Achsenebene von C_1^1 als gemeinsamer Symmetrieebene der ∞^2 einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide.

12. Es schneide erstens eine eigentliche Achsenebene μ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 rechtwinklig eine Nebensymmetrieachse dieses Gebildes.

Jede etwa zur Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ von C_1^1 senkrechte eigentliche Achsenebene μ der Kongruenz ist die gemeinsame Symmetrieebene [9]) je einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit der gemeinsamen Hauptachse $\mathfrak{c}_1$, und jede solche Büschelschar geht durch das einscharig in C_1^1 enthaltene zerfallene Rotationsparaboloid P_∞^2. In einer solchen Büschelschar ist jeder Punkt von $\mathfrak{c}_1$ als Scheitelpunkt einer Fläche ein durch C_1^1 aufgeprägter Eichpunkt dieser Nebensymmetrieachse, ferner jeder Punkt des mit der Doppelpunktsgerade von P_∞^2 vereinigten uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ ein diesem Kongruenzstrahle aufgeprägter Eichpunkt (vgl. **1**).

Alle zu $\mathfrak{c}_1$ senkrechten eigentlichen Achsenebenen sind hier mit der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 orthogonal verknüpft [6]). Fällt demnach eine Ebene μ nacheinander auf jede eigentliche zu $\mathfrak{c}_1$ senkrechte Ebene, und bleibt sie dabei die gemeinsame Symmetrieebene je einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades, so bestimmen die Flächen dieser Büschelscharen in γ den durch $\mathfrak{c}_1$ gehenden, also auch den uneigentlichen Kongruenzstrahl c_∞ enthaltenden Parallelenbüschel ihrer zu den Ebenen μ senkrechten Hauptachsen. Alle eigentlichen Strahlen

[9]) A. a. O. [1]), Nr. 15.

dieses Parallelenbüschels haben die ihnen durch C_1^1 aufgeprägten Eichpunkte auf den Geraden $\mathfrak{c}_1$ und c_∞.

Zu jeder Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit je einer zu einer Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ von C_1^1 senkrechten gemeinsamen eigentlichen Symmetrieebene μ gehört dasselbe, die in C_1^1 gelegenen zu μ parallelen Scheitelstrahlen der Büschelscharflächen enthaltende Paraboloid P^2 wie (vgl. 8) derselbe parabolische Eichebenenzylinder E_ε^2. Da die in C_1^1 und auf P^2 gelegenen Strahlen die Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ rechtwinklig schneiden, so ist P^2 das durch $\mathfrak{c}_1$ gehende einscharig in C_1^1 enthaltene gleichseitige Paraboloid. Und der parabolische Ebenenzylinder E_ε^2 zerfällt in den Ebenenbüschel erster Ordnung $\mathfrak{c}_1$ und in den durch den uneigentlichen Kongruenzstrahl c_∞ gehenden Büschel paralleler Asymptotenebenen von P^2.

Die in einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer auf $\mathfrak{c}_1$ senkrechten gemeinsamen eigentlichen Symmetriesbene μ liegenden zwei zerfallenen Flächen sind reell. Die eine hat den mit μ inzidenten Kongruenzstrahl m zur Doppelpunktsgerade. Die andere ist bei diesen ∞^1 Büschelscharen das zerfallene Rotationsparaboloid P_∞^2. Von der zur gemeinsamen Symmetrieebene μ senkrechten gemeinsamen Hauptachse $\mathfrak{c}_1$ werden die Büschelscharflächen je in den Punktepaaren einer symmetrischen Punktinvolution geschnitten. Sie hat außer dem uneigentlichen Punkt $\mathfrak{C}_{1\infty}$ von $\mathfrak{c}_1$ noch den Doppelpunkt $\mu\mathfrak{c}_1$. Fällt μ nacheinander auf alle zu $\mathfrak{c}_1$ senkrechten Ebenen, so bilden die zugehörigen symmetrischen Punktinvolutionen auf $\mathfrak{c}_1$ einen Büschel mit zwei mit dem uneigentlichen Punkte $\mathfrak{C}_{1\infty}$ vereinigten Basispunkten. Die Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ von C_1^1 ist aber ein Strahl des gleichseitigen Paraboloides P^2, auf dem die zu den Normalebenen μ von $\mathfrak{c}_1$ parallelen Kongruenzstrahlen liegen. Somit bestehen die Punktepaare jeder Involution unseres Büschels von Punktinvolutionen aus für P^2 konjugierten Punkten.

In jeder Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer $\mathfrak{c}_1$ rechtwinklig schneidenden Symmetrieebene μ liegt ferner, wie oben hervorgehoben, das in C_1^1 einscharig enthaltene zerfallene Rotationsparaboloid P_∞^2. Es hat außer der allen Flächen einer solchen Büschelschar gemeinsamen Hauptachse $\mathfrak{c}_1$ noch ∞^1 zu ihr parallele eigentliche Hauptachsen[3]) in der μ orthogonal verknüpften Fluchtebene γ. Diese Hauptachsen schneiden P_∞^2 im uneigentlichen Punkte $\mathfrak{C}_{1\infty}$ von $\mathfrak{c}_1$ zweimal. Und da in $\mathfrak{C}_{1\infty}$ die Fluchtebene γ das gleichseitige Paraboloid P^2 berührt, auf dem die in C_1^1 gelegenen Scheitelstrahlen aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit der gemeinsamen Hauptachse $\mathfrak{c}_1$ liegen, so sind die eigentlichen Punkte jeder mit γ inzidenten zu $\mathfrak{c}_1$ parallelen Hauptachse von P_∞^2 dem uneigentlichen Punkte $\mathfrak{C}_{1\infty}$ von $\mathfrak{c}_1$ sowohl für P^2 wie P_∞^2 konjugiert. Die zu $\mathfrak{c}_1$ parallelen eigentlichen Hauptachsen von P_∞^2 tragen folglich in den polaren Räumen dieser beiden Paraboloide die nämlichen parabolischen Punktinvolutionen. Daß endlich in den polaren Räumen von P_∞^2 und P^2 der uneigentliche Kongruenzstrahl c_∞ als Doppelpunktsgerade von P_∞^2 und als Strahl von P^2 dieselbe Punktinvolution — nämlich die identische — trägt, ist selbstverständlich.

Hiernach gilt zusammengefaßt: Bei einer einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiten Grades mit einer zu einer Nebensymmetrieachse der Kongruenz senkrechten eigentlichen Symmetrieebene μ trägt jede zu μ senkrechte Hauptachse im polaren Raume der Fläche wie im polaren Raume des gleichseitigen Paraboloides P^2, dessen eine Regel-

schar aus den zu jener Nebensymmetrieachse senkrechten Kongruenzstrahlen besteht, dieselbe Involution konjugierter Punkte.

Die mit allen die Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ rechtwinklig schneidenden Ebenen μ orthogonal verknüpfte Fluchtebene γ schneidet das gleichseitige Paraboloid P^2 in einer in das Strahlenpaar $\mathfrak{c}_1 c_\infty$ zerfallenen Parabel. Sie ist die Eichparabel e_ε^2 des durch $\mathfrak{c}_1$ gehenden gemeinsamen Büschels paralleler Hauptachsen aller Büschelscharen einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit je einer zu $\mathfrak{c}_1$ senkrechten gemeinsamen eigentlichen Symmetrieebene μ. Aus den bisherigen Entwicklungen dieser Nummer ergibt sich folglich auch für jede zu einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 senkrechte eigentliche Achsenebene μ der Kongruenz die Gültigkeit des in Nummer **5** bewiesenen Lehrsatzes.

Auch der Lehrsatz in Nummer **9** bleibt für solche Achsenebenen, wie wir gleich zeigen werden, bestehen. Nämlich die gemeinsame Hauptachse $\mathfrak{c}_1$ jeder Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer $\mathfrak{c}_1$ rechtwinklig schneidenden gemeinsamen eigentlichen Symmetrieebene μ trägt je eine Involution paarweise konjugierter Durchmesserebenen für jede Büschelscharfläche. $\mathfrak{c}_1$ ist aber ein Strahl des gleichseitigen Paraboloides P^2, auf dem die zu den Ebenen μ parallelen Kongruenzstrahlen liegen. Folglich besteht jede dieser ∞^1 kollokalen Ebeneninvolutionen nicht nur aus paarweise konjugierten Durchmesserebenen der sie bestimmenden Büschelscharfläche, sondern auch aus für P^2 paarweise konjugierten Ebenen. Endlich trägt der, beiden Paraboloiden P^2, P_∞^2 gemeinsame uneigentliche Kongruenzstrahl c_∞ in den polaren Räumen dieser Paraboloide die identische Ebeneninvolution; außerdem auch jede zu $\mathfrak{c}_1$ parallele, also mit der Fluchtebene γ inzidente eigentliche Hauptachse von P_∞^2 dieselbe parabolische Ebeneninvolution. W. z. b. w.

Damit ist die Einordnung der zu einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 senkrechten eigentlichen Achsenebenen der Kongruenz in die Lehrsätze der Nummern **5** und **9** durchgeführt, d. h. auch in den diese beiden Lehrsätze umfassenden Hauptsatz in Nummer **10**.

13. Es sei zweitens eine Achsenebene μ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 inzident mit einer Nebensymmetrieachse dieses Gebildes (vgl. **11**).

Geht etwa μ durch die Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ von C_1^1, so hat die Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit der gemeinsamen Symmetrieebene μ außer dieser noch die auf μ in $\mathfrak{c}_1$ senkrechte Ebene ε zur gemeinsamen Symmetrieebene [10]). Die Ebenen μ, ε sind wechselseitig orthogonal miteinander verknüpft. In ihnen liegt je ein Parallelstrahlenbüschel zu ihrer Schnittgerade $\mathfrak{c}_1$ senkrechter Hauptachsen der Büschelscharflächen und somit bzw. je eine Eichparabel e_μ^2 und e_ε^2. Jede Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit zwei in einer Nebensymmetrieachse der Kongruenz einander rechtwinklig schneidenden Symmetrieebenen wird hiernach durch zwei Eichparabeln charakterisiert.

Bei den Eichparabeln e_ε^2, e_μ^2 unserer Büschelschar fallen die Fußpunkte N der zu ihren Ebenen bzw. senkrechten Kongruenzstrahlen n je auf den eigentlichen Scheitelpunkt. Beide Parabeln können daher nicht auf die in Nummer **2** angegebene Weise konstruiert werden. Bekanntlich trägt aber der mit der Ebene ε inzidente Kongruenzstrahl e im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 die gleiche Punktinvolution wie im polaren Raume jeder einscharig in der Kongruenz enthaltenen Fläche zweiten Grades, insbesondere wie im polaren Raume des durch die zu μ parallelen Kongruenzstrahlen

[10]) A. a. O.[1]), Nr. 13.

gehenden Paraboloides P^2. Folglich trägt e auch diese Involution im polaren Felde der auf P^2 gelegenen Eichparabel e_ε^2. Diese Eichparabel ist also bestimmt durch ihre in Σ_{ig} auf dem Kongruenzstrahle e festgelegte Involution für sie konjugierter Punkte, durch ihre mit der Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ vereinigte Hauptachse und durch ihre schon in Nummer **2** gefundene eigentliche Scheiteltangente $\mathfrak{f}$. Analoges gilt für die Eichparabel e_μ^2.

Die Schnittgerade $\mathfrak{c}_1$ der beiden gemeinsamen Symmetrieebenen μ, ε unserer Büschelschar ist ein gemeinsamer Durchmesser der beiden Paraboloide P^2, die bzw. die zu diesen Symmetrieebenen parallelen Kongruenzstrahlen tragen (vgl. **2**). Jede der beiden Ebenen wird von dem mit der andern inzidenten Kongruenzstrahl rechtwinklig geschnitten. Folglich ist bei einer Büschelschar mit zwei gemeinsamen in einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 einander rechtwinklig schneidenden Symmetrieebenen μ, ε diese Nebensymmetrieachse die eigentliche Hauptachse der beiden Paraboloide P^2, die bzw. durch die zu μ, ε parallelen Kongruenzstrahlen gehen. Nach Nummer **8** bestimmt jedes von ihnen bzw. einen zu der Büschelschar gehörigen parabolischen Eichebenenzylinder $\mathsf{E}_\varepsilon^2, \mathsf{E}_\mu^2$. Die eigentlichen Symmetrieebenen dieser Zylinder sind mit der beiden Paraboloiden gemeinsamen eigentlichen Hauptachse $\mathfrak{c}_1$ inzident.

In gleicher Weise wie in den Nummern **5** und **9** ergibt sich für die Flächen unserer Büschelschar, daß sie in ihren zu μ senkrechten Hauptachsen Involutionen konjugierter Punkte und Ebenen hervorrufen, die zugleich im polaren Raume des die zu μ parallelen Kongruenzstrahlen enthaltenden Paraboloides P^2 liegen. Analoges gilt von den zu ε senkrechten Hauptachsen der Büschelscharflächen für das die zu ε parallelen Kongruenzstrahlen enthaltende Paraboloid P^2. — Der Hauptsatz in Nummer **10** ist nunmehr auch auf die mit einer Nebensymmetrieachse der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 inzidenten Achsenebenen dieses Gebildes ausgedehnt.

14. Unter den in Nummer **13** erledigten Büschelscharen einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit einer durch eine Nebensymmetrieachse von C_1^1 gehenden gemeinsamen Symmetrieebene ist diejenige Büschelschar hervorzuheben, deren gemeinsame Symmetrieebene die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} der Kongruenz ist. Sie hat noch zwei, γ bzw. in den Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ rechtwinklig schneidende, mit der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 inzidente gemeinsame Symmetrieebenen und besteht aus den Antidurchmesserflächen [4]) der Kongruenz. Während sonst bei einer gemeinsamen Symmetrieebene μ einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades die zu ihr senkrechten Hauptachsen der Büschelscharflächen einen Parallelenbüschel bilden, bilden bei der Büschelschar der Antidurchmesserflächen die zu γ senkrechten Hauptachsen den durch c_d gehenden Parallelenbündel. Er wird erschöpft durch die allen Antidurchmesserflächen gemeinsame Hauptachse c_d und durch die übrigen noch zu γ senkrechten Hauptachsen des in der Büschelschar der Antidurchmesserflächen gelegenen zerfallenen Rotationsparaboloides P_∞^2. Jede Ebene der Hauptsymmetrieachse c_d ist mit der Fluchtebene γ orthogonal verknüpft [6]), und enthält einen Büschel zu γ senkrechter parallelen Hauptachsen von P_∞^2. Nun trägt jede der beiden Ebenen, die durch die Leitgeraden u, v von C_1^1 parallel zu γ laufen, einen Büschel paralleler Kongruenzstrahlen. Beide Büschel zusammen bilden die in C_1^1 enthaltene Regelschar unseres zerfallenen Rotationsparaboloides. Deren Leitschar besteht ebenfalls aus zwei von jenem Ebenenpaare getragenen Parallelenbüscheln. Die zwei Parallelen, in denen jede Ebene der Hauptsymmetrieachse c_d die

beiden mit den Leitgeraden u, v von C_1^1 bzw. inzidenten, zu γ parallelen Ebenen schneidet, sind somit die Eichparabeln des in dieser Ebene gelegenen Büschels paralleler zu γ senkrechten Hauptachsen von P_∞^2. Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz C_1^1 ist diese zerfallene Eichparabel reell, bei einer elliptischen imaginär.

Die beiden durch die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 gehenden gemeinsamen Symmetrieebenen $\mathfrak{c}_1 c_d$, $\mathfrak{c}_2 c_d$ der Antidurchmesserflächen von C_1^1 sind mit γ wechselseitig orthogonal verknüpft [6]). Jede bestimmt als Asymptotenebene des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 der Kongruenz in γ einen Büschel paralleler zu ihr senkrechten Hauptachsen der Antidurchmesserflächen. Dieser Parallelenbüschel besteht, außer aus der zu der betreffenden gemeinsamen Symmetrieebene — etwa zu $\mathfrak{c}_1 c_d$ — senkrechten Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 als gemeinsamer Hauptachse, aus Hauptachsen von P_∞^2. Nun bilden die zur gemeinsamen Symmetrieebene $\mathfrak{c}_1 c_d$ parallelen Kongruenzstrahlen das durch $\mathfrak{c}_2$ gehende einscharig in C_1^1 enthaltene gleichseitige Paraboloid. Es wird von der mit der Achsenebene $\mathfrak{c}_1 c_d$ von C_1^1 orthogonal verknüpften Fluchtebene γ in der Eichparabel des Büschels zur Ebene $\mathfrak{c}_1 c_d$ senkrechter parallelen Hauptachsen der Antidurchmesserflächen geschnitten. Die Ebene γ schneidet aber unser gleichseitiges Paraboloid in der Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_2$ und im uneigentlichen Kongruenzstrahle c_∞. Folglich ist das Strahlenpaar $\mathfrak{c}_2 c_\infty$ die Eichparabel des Parallelenbüschels der zur Achsenebene $\mathfrak{c}_1 c_d$ von C_1^1 senkrechten Hauptachsen aller Antidurchmesserflächen. Ebenso trägt das durch die Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ von C_1^1 gehende einscharig in der Kongruenz enthaltene gleichseitige Paraboloid die zur gemeinsamen Symmetrieebene $\mathfrak{c}_2 c_d$ der Antidurchmesserflächen parallelen Kongruenzstrahlen; und das Strahlenpaar $\mathfrak{c}_1 c_\infty$ ist die Eichparabel des Parallelenbüschels der zur Ebene $\mathfrak{c}_2 c_d$ senkrechten Hauptachsen aller Antidurchmesserflächen.

Bei den Antidurchmesserflächen von C_1^1 sind, wie schon hervorgehoben, die zwei Symmetrieebenen $\mathfrak{c}_1 c_d$, $\mathfrak{c}_2 c_d$ mit der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} orthogonal verknüpft, und γ als Symmetrieebene der Antidurchmesserflächen mit den Ebenen der Hauptsymmetrieachse c_d der Kongruenz. Die mit der Symmetrieebene $\mathfrak{c}_1 c_d$ orthogonal verknüpfte Ebene γ bedingt den in den Ebenenbüschel erster Ordnung $\mathfrak{c}_2$ und den Parallelebenenbüschel c_∞ zerfallenen parabolischen Eichebenenzylinder, die mit der Symmetrieebene $\mathfrak{c}_2 c_d$ orthogonal verknüpfte Ebene γ den in den Ebenenbüschel erster Ordnung $\mathfrak{c}_1$ und den Parallelebenenbüschel c_∞ zerfallenen. — Endlich bedingen die ∞^1 Ebenen der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 — als mit γ orthogonal verknüpft — stets denselben parabolischen Eichebenenzylinder. Er ist in zwei Parallelebenenbüschel zerfallen, deren Ebenen die Ebene γ rechtwinklig schneiden und bzw. zu den Leitgeraden u, v der Kongruenz parallel laufen. Die beiden Parallelebenenbüschel bestehen aus den Asymptotenebenen des einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Rotationsparaboloides P_∞^2. Seine beiden Paare von Büscheln paralleler Regelstrahlen werden von zwei bzw. mit den Leitgeraden u, v inzidenten zu γ parallelen Ebenen getragen. Jeder Punkt von P_∞^2 ist mit einer Hauptachse von P_∞^2 inzident und somit ein Scheitelpunkt der Fläche. Die beiden mit ihm inzidenten Regelstrahlen von P_∞^2 sind seine Scheitelstrahlen. Sie liegen in den beiden durch die Hauptachse gehenden Asymptotenebenen. Die beiden Asymptotenebenenbüschel sind, je nachdem die lineare Kongruenz hyperbolisch oder elliptisch ist, reell oder konjugiert imaginär.

15. Bei zwei nicht konzentrischen Mittelpunktsflächen zweiten Grades mit einer gemeinsamen Symmetrieebene laufen die zu ihr senkrechten Hauptachsen parallel.

Zwei einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltene Paraboloide mögen hiernach nur, wenn ihre eigentlichen Hauptachsen parallel sind, die uneigentliche Ebene zur gemeinsamen Symmetrieebene haben. Je zwei solcher Paraboloide mit parallelen eigentlichen Hauptachsen sind durch eine Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Paraboloide mit der uneigentlichen Ebene als gemeinsamer Symmetrieebene verbunden[8]). Die Büschelscharparaboloide berühren einander längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞. In jeder Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener längs c_∞ einander berührenden Paraboloide liegt das einscharig in C_1^1 enthaltene zerfallene Rotationsparaboloid P_∞^2. Das Bündelheer einscharig in C_1^1 enthaltener Paraboloide läßt sich in ∞^1 Büschelscharen längs c_∞ einander berührender Paraboloide auflösen. Während jede eigentliche Achsenebene von C_1^1 als gemeinsame Symmetrieebene einer einzigen Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades auftritt, ist hiernach die uneigentliche Ebene als Achsenebene der Kongruenz die gemeinsame Symmetrieebene ∞^1 solcher Büschelscharen. Bei einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Paraboloide, die einander längs c_∞ berühren, bilden die eigentlichen Hauptachsen der unzerfallenen Paraboloide und der uneigentliche Kongruenzstrahl c_∞ als Hauptachse von P_∞^2 einen Parallelenbüschel in einer durch die Büschelschar bestimmten der uneigentlichen Ebene orthogonal verknüpften Ebene ε. Sie berührt zweimal das dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 von C_1^1 orthogonal verknüpfte Zylindroid C^3. Jede C^3 zweimal wirklich berührende Ebene enthält zwei solcher — in den beiden Kuspidalebenen von C^3 vereinigten — reellen Parallelenbüschel, jede C^3 zweimal virtuell berührende Ebene zwei konjugiert imaginäre. Die Strahlen dieser Parallelenbüschel stehen bzw. senkrecht auf den beiden in der Ebene gelegenen Regelstrahlen von C^3.

16. Es sei gegeben: Eine zweimal wirklich berührende Ebene ε des dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3, ferner einer, $\mathfrak{c}_m$, der beiden mit ε inzidenten Regelstrahlen von C^3 und endlich der in ε gelegene, aus dem uneigentlichen Kongruenzstrahle c_∞ und den eigentlichen zu $\mathfrak{c}_m$ senkrechten Strahlen a gebildete Parallelenbüschel von Hauptachsen einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener, längs c_∞ einander berührenden Paraboloide.

Kreuzt dann der Regelstrahl $\mathfrak{c}_m^n$ von C^3 den Regelstrahl $\mathfrak{c}_m$ der Fläche rechtwinklig, und ist $\mathfrak{M}^2$ die von den $\mathfrak{c}_m^n$ rechtwinklig schneidenden Kongruenzstrahlen erfüllte gleichseitig paraboloidische Regelschar[11]), so hat die Leitschar von $\mathfrak{M}^2$ die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 und die zu γ parallelen Ebenen zu Asymptotenebenen. Die C^3 zweimal berührende Ebene ε hat demnach mit dem Trägerparaboloide P^2 von $\mathfrak{M}^2$ außer dem uneigentlichen Kongruenzstrahle c_∞ einen Leitstrahl $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{M}^2$ gemein. Als gleichseitig paraboloidische Regelschar von C_1^1 geht $\mathfrak{M}^2$ durch die Hauptsymmetrieachse c_d der Kongruenz. Folglich schneidet c_d den Leitstrahl $\mathfrak{f}$. Nun ist jeder Strahl von $\mathfrak{M}^2$, da er den mit ihm inzidenten Strahl des Parallelenbüschels der Hauptachsen a rechtwinklig schneidet, ein Scheitelstrahl eines Büschelscharparaboloides, sein Schnittpunkt mit dem Leitstrahl $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{M}^2$ der eigentliche Scheitelpunkt dieser Fläche[12]) und als solcher ein durch C_1^1 der durch ihn gehenden Hauptache a aufgeprägter

---

[11]) A. a. O.[1]), Nr. 24.

[12]) S. Jolles, Die Hauptachsenflächen der Büschelscharen aus den einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **172** (1934), Nr. 8, IV.

Eichpunkt. Jeder der von ε getragenen parallelen Hauptachsen a der Büschelscharparaboloide ist außerdem durch C_1^1 der ihnen allen gemeinsame uneigentliche Punkt als Eichpunkt aufgeprägt. Endlich ist jeder Punkt des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ ein ihm durch C_1^1 aufgeprägter Eichpunkt (vgl. **1**). Somit schneidet die gegebene C^3 zweimal berührende Ebene ε das gleichseitige Paraboloid P^2 in der in das Strahlenpaar $\S c_\infty$ zerfallenen Eichparabel der von ε getragenen parallelen Hauptachsen a unserer Büschelschar längs c_∞ einander berührender einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide. Hiernach ist bewiesen:

Bei einer Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener, längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührenden Paraboloide bilden die in C_1^1 gelegenen Scheitelstrahlen der Paraboloide die eine Regelschar eines gleichseitigen Paraboloides P^2. Seine eigentliche Hauptachse kreuzt die parallelen Hauptachsen a der Büschelscharparaboloide rechtwinklig. Die Ebene ε der parallelen Hauptachsen a schneidet als zweimal berührende Ebene des dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 von C_1^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 das gleichseitige Paraboloid P^2 in der, in den uneigentlichen Kongruenzstrahl c_∞ und einen Strahl $\S$ zerfallenen Eichparabel e_ε^2 des Büschels paralleler Hauptachsen a. Der diesen Parallelbüschel eichende parabolische Ebenenzylinder E_ε^2 ist in die zwei Ebenenbüschel erster Ordnung mit den Achsen $\S$ und c_∞ zerfallen.

Wir zeigen jetzt, daß auch bei der vorliegenden Büschelschar von Paraboloiden die zugehörigen parallelen Hauptachsen a in dem polaren Raume jedes durch eine Hauptachse a bestimmten Paraboloides die nämliche Punkt- und Ebeneninvolution tragen wie im polaren Raume des gleichseitigen Paraboloides P^2, das durch die in C_1^1 gelegenen Scheitelstrahlen der Büschelparaboloide geht. Das gleichseitige Paraboloid P^2 schneidet nämlich jedes Büschelscharparaboloid außer in den (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von C_1^1 noch in dem allen einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloiden gemeinsamen uneigentlichen Kongruenzstrahl c_∞ und je einem eigentlichen Kongruenzstrahle s. Bei zwei *getrennten* Strahlen c_∞, s besteht hiernach die von der Hauptachse a des zugehörigen Büschelscharparaboloides in seinem polaren Raume getragene symmetrische Punktinvolution zugleich aus Paaren konjugierter Punkte für das gleichseitige Paraboloid P^2. Und da die mit a inzidenten beiden Asymptotenebenen ac_∞, as des Büschelscharparaboloides Tangentenebenen von P^2 sind, so trägt diese Hauptachse a in den polaren Räumen beider Paraboloide die nämliche Ebeneninvolution. Bei zwei *vereinigten* Strahlen c_∞, s — also bei dem mit dem uneigentlichen Kongruenzstrahle c_∞ vereinigten Scheitelstrahle s des zerfallenen einscharig in C_1^1 enthaltenen Rotationsparaboloide P_∞^2 — ist auch die Hauptachse a dieser Fläche mit c_∞ vereinigt. Hier liegt ganz selbstverständlich die von ihr getragene identische Punkt- und Ebeneninvolution in den polaren Räumen der beiden Paraboloide P_∞^2 und P^2. W. z. b. w.

17. Zusammengefaßt ergeben die Nummern **12—16** folgende Ergebnisse:

Bei einer Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer Achsenebene μ von C_1^1 als gemeinsamer Symmetrieebene bilden die in der Kongruenz gelegenen zu μ parallelen Scheitelstrahlen der Büschelscharflächen die eine Regelschar eines Paraboloides P^2. Eine eigentliche Achsenebene μ von C_1^1 ist die gemeinschaftliche Symmetrieebene einer einzigen Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades, hingegen die uneigentliche Ebene als Achsenebene von C_1^1

die gemeinschaftliche Symmetrieebene von ∞^1 solcher Büschelscharen, deren jede aus ∞^1 längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles C_∞ einander berührenden Paraboloiden besteht. Die zu diesen Büschelscharen von Paraboloiden gehörigen Paraboloide P^2 sind die in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide. Bei einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen gemeinschaftlichen Symmetrieebene μ besteht die Regelschar $\mathfrak{M}^2$ der in C_1^1 gelegenen zu μ parallelen Scheitelstrahlen der Büschelscharflächen auf dem zugehörigen Paraboloide P^2 außer aus jedem zu μ parallelen, aus dem mit μ inzidenten Kongruenzstrahl. Bei einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener, längs c_∞ einander berührenden Paraboloide schneiden alle die Regelschar $\mathfrak{M}^2$ bildenden Kongruenzstrahlen des zugehörigen gleichseitigen Paraboloides P^2 einen Regelstrahl $\mathfrak{c}_m^n$ des mit dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 von C_1^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3. Der Regelstrahl $\mathfrak{c}_m^n$ hat die gleiche Richtung wie die parallelen Hauptachsen aller Büschelscharparaboloide. Die zu der gemeinschaftlichen eigentlichenSymmetrieebene μ senkrechten Hauptachsen s der Flächen einer Büschelschar $(F_s^2 \ldots)$ einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit der Symmetrieebene μ tragen im polaren Raume der von jeder solchen Hauptachse bestimmten Büschelscharfläche wie im polaren Raume des zur Büschelschar gehörigen Paraboloides P_s^2 die nämlichen Punkt- und Ebeneninvolutionen. Gleiches gilt von den parallelen Hauptachsen der Paraboloide einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener, längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührenden Paraboloide.

Nach dem am Schlusse vorstehender Zusammenfassung Angeführtem gehört zu jedem Parallelenbüschel $(s \ldots)$ im Hauptachsenkomplexe Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades [1]) ein einscharig in der Kongruenz enthaltenes Paraboloid P_s^2. Das Paraboloid P_s^2 und die einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades F_s^2 mit je einer Hauptachse s rufen bzw. in diesen Hauptachsen die nämlichen Involutionen konjugierter Punkte und Ebenen hervor. Hiernach vermag man ohne Kenntnis einer Fläche aus der von den Flächen F_s^2 gebildeten Büschelschar die von ihnen je in den Hauptachsen s hervorgerufenen Involutionen konjugierter Punkte und Ebenen allein mit Hilfe des Paraboloides P_s^2 zu konstruieren. Jeder Strahl von Γ^2 liegt in einem Büschel paralleler Komplexstrahlen. Folglich kann jeder Strahl des Hauptachsenkomplexes Γ^2 als eine Hauptachse s aufgefaßt werden. D. h.:

Gegeben sei ein Strahl s aus dem Hauptachsenkomplexe Γ^2 aller einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades, gegeben sei ferner das nach der obigen Zusammenstellung von Lehrsätzen zu s (und den zu s parallelen Komplexstrahlen) gehörige Paraboloid P_s^2. Dann hat in s die in C_1^1 einscharig enthaltene Fläche zweiten Grades F_s^2 mit der Hauptachse s und das Paraboloid P_s^2 dieselben Involutionen konjugierter Punkte und Ebenen. Kurz: das Paraboloid P_s^2 genügt zur Konstruktion der vom Komplexstrahle s getragenen (reellen oder konjugiert imaginären) Scheitelpunkte und Asymptotenebenen.

Nunmehr ist die den Strahlen s von Γ^2 aufgeprägte Punkt- und Ebeneneichung auch ohne Kenntnis der zugehörigen Flächen F_s^2 durchführbar. Die mit den Strahlen s von Γ^2 inzidenten Scheitelpunkte und Asymptotenebenen der Flächen F_s^2 sind der Forschung erschlossen.

18. Die zu einer eigentlichen Achsenebene μ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 senkrechte Hauptachse a jeder Fläche einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener

Flächen zweiten Grades mit der gemeinsamen Symmetrieebene μ trägt im polaren Raume dieser Fläche dieselbe Ebeneninvolution (vgl. **17**) wie im polaren Raume des Paraboloides P^2, dessen eine Regelschar aus den in C_1^1 gelegenen zu μ parallelen Scheitelstrahlen der Büschelscharflächen besteht. Ein Ebenenpaar der von einer solchen Hauptachse a getragenen Involution konjugierter Durchmesserebenen der zugehörigen Büschelscharfläche sind deren zwei mit a inzidente Symmetrieebenen. Nun ist jede dieser beiden zueinander senkrechten Symmetrieebenen [13]) wie auch die gemeinsame Symmetrieebene μ der Büschelschar als Achsenebene der Kongruenz eine Tangentenebene des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1. Und die zu einer eigentlichen Tangentenebene eines Paraboloides senkrechten Tangentenebenen bilden einen parabolischen Ebenenzylinder der Fläche. Also ist gezeigt:

Ist eine eigentliche Achsenebene μ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 die gemeinschaftliche Symmetrieebene einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades, so sind die beiden Symmetrieebenen, die jede Büschelscharfläche in ihre zu μ senkrechte Hauptachse a sendet, konjugiert für das der Büschelschar zugehörige Paraboloid P^2, dessen eine Regelschar durch die in C_1^1 enthaltenen zu μ parallelen Scheitelstrahlen der Büschelscharflächen geht. Die Paare zueinander senkrechter Symmetrieebenen dieser Flächen, die von den μ rechtwinklig schneidenden Hauptachsen a ausstrahlen, bilden die Ebenenpaare eines involutorisch parabolischen Ebenenzylinders. Seine Involutionsebene ε ist die Direktrixebene des parabolischen Ebenenzylinders und μ orthogonal verknüpft.

Der involutorische parabolische Ebenenzylinder zerfällt, sobald die eigentliche Achsenebene μ eine der beiden Nebensymmetrieachsen von C_1^1 rechtwinklig schneidet, in zwei involutorische Ebenenbüschel erster Ordnung. Der eine ist orthogonal, und sein Träger ist die Nebensymmetrieachse, der andere ist parabolisch. Die beiden vereinigten Doppelebenen dieser parabolischen Ebeneninvolution trägt die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1. Ihre Ebenenpaare bestehen aus γ und je einer zur andern Nebensymmetrieachse senkrechten Ebene.

Der involutorische parabolische Ebenenzylinder zerfällt ferner in zwei parabolisch involutorische Ebenenbüschel erster Ordnung, sobald die eigentliche Achsenebene μ mit einer der beiden Nebensymmetrieachsen — etwa mit $\mathfrak{c}_1$ — inzident ist. Die vereinigten Doppelebenen jeder der beiden parabolischen Ebeneninvolutionen trägt die mit μ orthogonal verknüpfte, also mit $\mathfrak{c}_1$ inzidente Ebene. Die Elementenpaare der einen parabolischen Ebeneninvolution bestehen aus ε und aus je einer $\mathfrak{c}_1$ rechtwinklig schneidenden Ebene, die Elementenpaare der andern aus ε und je einer Ebene der Rotationsachse desjenigen einscharig in C_1^1 enthaltenen Rotationshyperboloides, dessen Rotationsachse in ε liegt.

Ebenso einfach folgt für jede der ∞^1 Büschelscharen längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührender einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide (vgl. **16**), d. h. für die Büschelscharen einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit der uneigentlichen Ebene als gemeinsamer Symmetrieebene:

Die beiden eigentlichen Symmetrieebenen jedes Paraboloides aus einer Büschelschar längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührender einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Paraboloide sind für das gleichseitige Paraboloid P^2 konjugiert, dessen eine Regelschar aus den in C_1^1 gelegenen Scheitelstrahlen der Büschelscharflächen besteht. Diese Paare zueinander senkrechten Ebenen bilden einen invo-

[13]) T. Reye, Die Geometrie der Lage **2**, Stuttgart 1907 (4. Aufl.), S. 289, Nr. 120.

lutorischen parabolischen Ebenenzylinder. Seine Involutionsebene ist als Direktrixebene des parabolischen Ebenenzylinders eine zweimal berührende Ebene des dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 von C_1^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3.

Für die Fluchtebene γ als Tangentenebene von C^2 und zweimal berührenden Ebene von C^3 bestehen die beiden zugehörigen Büschelscharen längs c_∞ einander berührender Paraboloide aus den einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloiden mit je einer der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 als gemeinsamer Hauptachse. Für jede dieser Büschelscharen zerfällt der durch sie im vorstehenden Lehrsatze bestimmte involutorische parabolische Ebenenzylinder in zwei parabolisch involutorische Ebenenbüschel erster Ordnung mit gemeinsamen von γ getragenen Doppelebenen. Bei der Büschelschar aus den einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloiden mit der gemeinsamen Hauptachse $\mathfrak{c}_1$ setzt sich jedes Elementenpaar des einen parabolisch involutorischen Ebenenbüschels erster Ordnung aus γ und je einer zu $\mathfrak{c}_1$ senkrechten Ebene zusammen, jedes Elementepaar des andern aus γ und je einer mit $\mathfrak{c}_1$ inzidenten Ebene. Das einscharig in C_1^1 enthaltene gleichseitige Paraboloid, für das die Ebenen jedes Elementenpaares dieser beiden parabolisch involutorischen Ebeneninvolutionen konjugiert sind, hat die Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_2$ zur eigentlichen Hauptachse. — Analoges gilt für die Büschelschar der einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide mit der gemeinsamen Hauptachse $\mathfrak{c}_2$.

B. Die einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide.

19. Jede Büschelschar einscharig in einer lineraen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen Achsenebene μ von C_1^1 als gemeinsamer Symmetrieebene bedingt (vgl. **17**) ein einscharig in der Kongruenz enthaltenes ungleichseitiges Paraboloid P^2. Seine in C_1^1 enthaltene Regelschar besteht aus den in C_1^1 gelegenen zu μ parallelen Scheitelstrahlen der Büschelscharflächen. Ferner bedingt jede der ∞^1 Büschelscharen einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit der uneigentlichen Ebene als gemeinsamer Symmetrieebene — d. h. jede der ∞^1 Büschelscharen einscharig in C_1^1 enthaltener, längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührenden Paraboloide — ein einscharig in C_1^1 enthaltenes gleichseitiges Paraboloid P^2, dessen in C_1^1 enthaltene Regelschar die in C_1^1 gelegenen Scheitelstrahlen der Büschelscharparaboloide bilden. Jene durch die eigentlichen Achsenebenen μ von C_1^1 bedingten ungleichseitigen Paraboloide P^2 und die von diesen Büschelscharen längs c_∞ einander berührender Paraboloide bedingten gleichseitigen Paraboloide seien als die jenen Achsenebenen μ bzw. diesen Büschelscharen von Paraboloiden *zugehörigen Scheitelstrahlenparaboloide* bezeichnet. Umgekehrt gehört jedes einscharig in C_1^1 enthaltene ungleichseitige Paraboloid als Scheitelstrahlenparaboloid zu je einer eigentlichen Achsenebene μ von C_1^1, jedes einscharig in C_1^1 enthaltene gleichseitige Paraboloid als Scheitelstrahlenparaboloid zur uneigentlichen Ebene als Achsenebene der Kongruenz.

20. Einer weder zu einer Nebensymmetrieachse einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 senkrechten noch mit ihr inzidenten Tangentenebene μ des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1 ist [6]) eine Tangentenebene ε des C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 orthogonal verknüpft. Sie enthält einen zur Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 parallelen Regelstrahl $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ von C^3. Dreht sich ε um $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$, so ist der Ebenenbüschel erster Ordnung $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}(\varepsilon \ldots)$ zu einem Büschel von Parallelen

$\gamma(\mathfrak{m}\ldots)$ auf der Fluchtebene γ perspektiv. Die zu den Ebenen ε in ihren Schnittgeraden $\varepsilon\gamma = \mathfrak{m}$ senkrechten Ebenen μ bilden einen zum Parallelenbüschel $\gamma(\mathfrak{m}\ldots)$ perspektiven und zum Ebenenbüschel $\mathfrak{c}_{\mathfrak{m}}(\varepsilon\ldots)$ projektiven, durch γ gehenden parabolischen Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$. Er ist C^2 umbeschrieben. Zu jeder seiner Ebenen gehört (vgl. **19**) als Achsenebene von C_1^1 ein Scheitelstrahlenparaboloid P^2. Die Scheitelstrahlenparaboloide P^2 haben (vgl. **2**) die parallelen Durchmesser $\mathfrak{m}$ und folglich zu ihnen parallele Hauptachsen. Parallele Hauptachsen von einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloiden bilden aber einen Parallelenbüschel in einer C^3 zweimal berührenden Ebene, und die zugehörigen Paraboloide eine zu dem Parallelenbüschel projektive Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener, längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührenden Paraboloide [8]). Jeder Strahl unseres Büschels paralleler Hauptachsen ist nun mit einem den Regelstrahl $\mathfrak{c}_{\mathfrak{m}}$ von C^3 rechtwinklig schneidenden Kongruenzstrahle n inzident (vgl. **8**). Ferner sendet die aus den Kongruenzstrahlen n gebildete gleichseitig paraboloidische Regelschar $\mathfrak{N}^2(n\ldots)$ einen Leitstrahl l in die Ebene des Parallelenbüschels. Folglich ist dieser durch die Punktreihe von l projektiv auf die Regelschar $\mathfrak{N}^2(n\ldots)$ bezogen, und $\mathfrak{N}^2(n\ldots)$ auf den Ebenenbüschel $\mathfrak{c}_{\mathfrak{m}}(\varepsilon\ldots)$ der zu den Kongruenzstrahlen n senkrechten Ebenen ε von $\mathfrak{c}_{\mathfrak{m}}$. Die zu den Ebenen ε bzw. senkrechten Achsenebenen μ bilden jedoch unsern parabolischen Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$ und die seinen Ebenen μ zugehörigen Scheitelstrahlenparaboloide unsere Büschelschar längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührender Paraboloide mit den Strahlen unseres Parallelenbüschels als eigentlichen Hauptachsen. Sonach ist dargetan:

Es drehe sich eine Tangentenebene ε des dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 um den in ihr liegenden Regelstrahl $\mathfrak{c}_{\mathfrak{m}}$ von C^3. Dann beschreiben die zu den Tangentenebenen ε senkrechten Achsenebenen μ von C_1^1 einen zum Ebenenbüschel $\mathfrak{c}_{\mathfrak{m}}(\varepsilon\ldots)$ projektiven parabolischen Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$. Der Ebenenzylinder ist C^2 umbeschrieben und geht durch die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1. Zugleich beschreiben die den Achsenebenen μ zugehörigen Scheitelstrahlenparaboloide P^2 eine sowohl zum Ebenenbüschel $\mathfrak{c}_{\mathfrak{m}}(\varepsilon\ldots)$ wie auch zum parabolischen Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$ projektive Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener, längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührenden Paraboloide.

Vorstehender Lehrsatz vereinfacht sich, wenn der Regelstrahl $\mathfrak{c}_{\mathfrak{m}}$ von C^3, was bisher ausgeschlossen war, eine Nebensymmetrieachse von C_1^1 — etwa $\mathfrak{c}_1$ — ist, der parabolische Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$ also aus dem Ebenenbüschel $\mathfrak{c}_1(\mu\ldots)$ und dem Parallelebenenbüschel der zur andern Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 senkrechten Ebenen μ besteht. Die den Ebenen dieses zerfallenen Ebenenzylinders zugehörigen Scheitelstrahlenparaboloide P^2 haben nunmehr die gemeinsame Hauptachse $\mathfrak{c}_1$ und bilden [14]) eine Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener, längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührenden Paraboloide. Zu dieser Büschelschar ist sowohl die von $\mathfrak{c}_1$ getragene Punktreihe $\mathfrak{c}_1(P\ldots)$ der Scheitelpunkte P der Büschelscharparaboloide P^2 perspektiv wie auch die Regelschar der in C_1^1 gelegenen Scheitelstrahlen m dieser Paraboloide auf dem einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide mit

[14]) A. a. O. [1]), Nr. 14.

der Hauptachse $\mathfrak{c}_2$. Der die Scheitelstrahlen m aus $\mathfrak{c}_1$ projizierende Ebenenbüschel $\mathfrak{c}_1(\mu \ldots)$ ist folglich nicht nur projektiv zur Punktreihe $\mathfrak{c}_1(P \ldots)$ der Scheitelpunkte P auf den die Büschelschar bildenden Scheitelstrahlenparaboloiden P^2, sondern auch zu dieser Büschelschar selbst.

21. Zugrunde liege eine Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer weder zu einer Nebensymmetrieachse senkrechten noch mit ihr inzidenten gemeinsamen eigentlichen Symmetrieebene μ. Der Symmetrieebene μ ist als Achsenebene von C_1^1 im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} der Kongruenz eine zu ihr senkrechte eigentliche Achsenebene μ' zugeordnet. μ' schneidet die Fluchtebene γ von Σ_{ig} in dem in Σ_{ig} dem uneigentlichen Strahle von μ zugeordneten Strahle g. Die in C_1^1 gelegenen zu μ parallelen Scheitelstrahlen der Büschelscharflächen bilden die aus den zu μ parallelen Kongruenzstrahlen bestehende Regelschar $\mathfrak{M}^2$ des zu μ gehörigen Scheitelstrahlenparaboloides P^2. Folglich sind der uneigentliche Strahl von μ und der Strahl g ein Paar in Σ_{ig} einander zugeordnete Leitstrahlen von $\mathfrak{M}^2$. Die Regelschar $\mathfrak{M}^2$ selbst besteht aus den mit g inzidenten Kongruenzstrahlen.

In $\mathfrak{M}^2$ liegt der zur Achsenebene μ' senkrechte Kongruenzstrahl $e_{\mu'}$. Jedes Paar zueinander senkrechter Ebenen von $e_{\mu'}$ bildet mit μ' ein dem Scheitelstrahlenparaboloide P^2 umbeschriebenes Ebenendreibein. Folglich ist der Schnittpunkt $E_{\mu'}$ von $e_{\mu'}$ mit g ein Punkt der *Direktrixebene* von P^2, d. h. der Ebene π, auf der die Mittelpunkte der P^2 umbeschriebenen gleichseitigen Ebenenkegel zweiter Ordnung liegen. Die Ebene π schneidet die Durchmesser von P^2 rechtwinklig. Die Schnittgerade $\mathfrak{m}$ von μ mit der Fluchtebene γ ist aber (vgl. **2**) ein Durchmesser von P^2. Also erweist sich die mit $E_{\mu'}$ inzidente zu $\mathfrak{m}$ senkrechte Ebene als Direktrixebene π des μ zugehörigen Scheitelstrahlenparaboloides P^2.

Die der Achsenebene μ von C_1^1 orthogonal verknüpfte Ebene ε enthält den Büschel paralleler zu μ senkrechten Hauptachsen unserer Büschelscharflächen. Dieser Parallelenbüschel bedingt (vgl. **8**) den ihm zugehörigen dem Paraboloid P^2 umbeschriebenen parabolischen Eichebenenzylinder E_ε^2. Jede Ebene von E_ε^2 steht aber auf der Tangentenebene μ von P^2 senkrecht. Somit ist die Direktrixebene π von P^2 zugleich die von E_ε^2. Sie schneidet folglich die μ orthogonal verknüpfte Ebene ε in der Hauptachse p_s einer Büschelscharfläche mit zwei in p_s zueinander senkrechten Asymptotenebenen. Die der Hauptachse p_s zugehörige Büschelscharfläche ist somit [15]) ein scheitelrechtes Hyperboloid S^2. Ein und nur ein scheitelrechtes Hyperboloid, dessen zu μ senkrechte Hauptachse eine symmetrische Involution konjugierter Durchmesserebenen trägt, liegt in unserer Büschelschar.

Heißt bei einem scheitelrechten Hyperboloide die eine symmetrische Involution konjugierter Durchmesserebenen tragende Hauptachse seine *charakteristische Hauptachse* und die zu ihr senkrechte Symmetrieebene seine *charakteristische Symmetrieebene*, so sagt das Vorstehende:

Jede Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer weder zu einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 senkrechten noch mit ihr inzidenten eigentlichen Achsenebene μ als gemeinsamer Symmetrieebene geht nur durch ein scheitelrechtes Hyperboloid S^2 mit einer μ rechtwinklig schneidenden charak-

[15]) A. a. O. [1]), Nr. 4.

teristischen Hauptachse p_s und mit μ als charakteristischer Symmetrieebene. In der Hauptachse p_s schneidet die Direktrixebene π des der Achsenebene zugehörigen Scheitelstrahlenparaboloides P^2 rechtwinklig die μ orthogonal verknüpfte Ebene ε. Der Parallelenbüschel in ε aus dem Hauptachsenkomplex Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades geht durch die charakteristische Hauptachse eines einzigen einscharig in C_1^1 gelegenen scheitelrechten Hyperboloides.

22. Was tritt ein, wenn im Lehrsatze von Nummer **21** eine eigentliche zu einer Nebensymmetrieachse der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 senkrechte Achsenebene μ von C_1^1 zur gemeinsamen Symmetrieebene der Büschelschar einscharig in der Kongruenz enthaltener Flächen zweiten Grades gewählt wird?

Zu jeder solchen Achsenebene μ gehört (vgl. **12**) als Scheitelstrahlenparaboloid P^2 dasselbe einscharig in C_1^1 enthaltene gleichseitige Paraboloid. Seine in C_1^1 gelegenen Strahlen schneiden die in Frage kommende Nebensymmetrieachse — etwa $\mathfrak{c}_1$ — rechtwinklig, seine eigentliche Hauptachse ist die andere Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1. Das gemeinsame gleichseitige Scheitelstrahlenparaboloid P^2 hat die $\mathfrak{c}_1$ mit der Hauptsymmetrieachse c_d der Kongruenz verbindende Ebene zur Scheitel- und Direktrixebene. Folglich liegt (vgl. **21**) in jeder Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen, $\mathfrak{c}_1$ rechtwinklig schneidenden gemeinsamen Symmetrieebene μ ein scheitelrechtes Hyperboloid mit der charakteristischen Hauptachse $\mathfrak{c}_1$.

Die einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit der Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ als gemeinsamer Hauptachse bilden ein Bündelheer [2]). Es sendet durch jedes Paar mit $\mathfrak{c}_1$ inzidenter Kongruenzstrahlen eine Fläche. Wird $\mathfrak{c}_1$ insbesondere durch ∞^1 dieser Strahlenpaare in den Punktepaaren einer Involution getroffen, so bilden die solche Punktepaare enthaltenden Bündelheerflächen eine Büschelschar. Die ∞^1 Paare mit $\mathfrak{c}_1$ inzidenter einander rechtwinklig kreuzenden Kongruenzstrahlen — als Paare einander rechtwinklig kreuzender Strahlen der in C_1^1 enthaltenen Regelschar $\mathfrak{M}^2$ auf dem gleichseitigen Paraboloide P^2 — treffen nun die zu ihnen senkrechte Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ bekanntlich in den Punktepaaren einer Involution. Und jedes dieser Strahlenpaare bildet ein Paar windschiefer Scheitelstrahlen eines einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloides mit der gemeinsamen Hauptachse $\mathfrak{c}_1$. Alle diese scheitelrechten Hyperboloide erschöpfen daher eine Büschelschar [16]). Im polaren Gebüschverbande einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades ist [2]) aber das durch $\mathfrak{c}_1$ gehende gleichseitige Paraboloid P^2 mit der andern Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ von C_1^1 als Hauptachse die Polfläche unseres Bündelheeres mit der gemeinsamen Hauptachse $\mathfrak{c}_1$. Ferner sind in der Büschelschar der Antidurchmesserflächen von C_1^1 das Rotationshyperboloid mit der Drehachse $\mathfrak{c}_1$ und das scheitelrechte Hyperboloid mit der charakteristischen Hauptachse $\mathfrak{c}_1$ füreinander autopolar [15]). Sonach gilt:

Jede Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer zu einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 senkrechten eigentlichen Achsenebene der Kongruenz als gemeinsamer Symmetrieebene geht ebenfalls (vgl. **21**) *durch ein scheitelrechtes Hyperboloid. Es hat die Nebensymmetrieachse als charakteristische Hauptachse. In jedem von beiden Bündelheeren einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 als gemeinsamer Hauptachse liegt eine Büschel-*

[16]) A. a. O. [1]), Nr. 17.

schar scheitelrechter Hyperboloide. Jede ihrer Flächen ist für das einscharig in C_1^1 enthaltene, durch die Nebensymmetrieachse gehende gleichseitige Paraboloid P^2 sowie für das einscharig in C_1^1 enthaltene Rotationshyperboloid mit der Nebensymmetrieachse als Drehachse autopolar. In jedem der beiden Parallelenbüschel aus dem Hauptachsenkomplexe Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades, die von der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 getragen werden, ist die je in jedem Büschel gelegene Nebensymmetrieachse der Kongruenz die gemeinsame charakteristische Hauptachse einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener scheitelrechten Hyperboloide.

23. Auch für eine mit einer Nebensymmetrieachse der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 inzidente Achsenebene μ gilt der in Nummer **21** ausgesprochene Lehrsatz. Doch muß nach dem Folgenden die Konstruktion der Direktrixebene π des zugehörigen Scheitelstrahlenparaboloides P^2 eine andere sein als die dort gefundene.

War nämlich μ eine mit keiner Nebensymmetrieachse von C_1^1 inzidente Achsenebene, war μ' die μ zugeordnete Achsenebene im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 und war endlich der Ebene μ die Ebene ε orthogonal verknüpft, so geht nach Nummer **21** die Direktrixebene π von P^2 durch den Fluchtpunkt $E_{\mu'}$ des μ' rechtwinklig schneidenden Kongruenzstrahles $e_{\mu'}$ senkrecht zur Schnittgerade $\mu\varepsilon$. Jeder mit einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 — etwa mit $\mathfrak{c}_1$ — inzidenten Ebene μ ist aber eine $\mathfrak{c}_1$ rechtwinklig schneidende Ebene μ' in Σ_{ig} zugeordnet. Ferner ist der zu μ' senkrechte Kongruenzstrahl $e_{\mu'}$ die uneigentliche Gerade c_∞ von γ; sie hat zum Fluchtpunkte [17]) ihren Schnittpunkt mit μ'. Folglich gehen hier durch diesen Fluchtpunkt nicht nur eine, sondern ∞^1 zu $\mathfrak{c}_1$ senkrechte Ebenen auf die mit $\mathfrak{c}_1$ vereinigte Schnittgerade $\mu\varepsilon = \mathfrak{m}$. In dem vorliegenden Ausnahmefalle ist also die Direktrixebene π von P^2 durch die in Nummer **21** ermittelte Konstruktion nicht bestimmt.

Zu unserer mit der Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ inzidenten Achsenebene μ von C_1^1 gehört (vgl. **13**) ein Scheitelstrahlenparaboloid P^2 mit der Hauptachse $\mathfrak{c}_1$. Seine eigentlichen Scheitelstrahlen sind der in μ gelegene Kongruenzstrahl m und der in γ gelegene $\mathfrak{c}_1$ im Punkte $\mathfrak{m}\mathfrak{c}_1$ rechtwinklig schneidende Leitstrahl l der Fläche. — l ist der Ort der Fluchtpunkte aller die Regelschar $\mathfrak{M}^2$ von P^2 erfüllenden Kongruenzstrahlen. Diese Kongruenzstrahlen kreuzen rechtwinklig den zu μ in einem Punkte von $\mathfrak{c}_1$ senkrechten Strahl $\mathfrak{f}_\mu$ des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1. Die Gerade $\mathfrak{f}_\mu$ ist folglich als Fokalachse des parabolischen Ebenenzylinders, der von den μ rechtwinklig schneidenden Tangentenebenen von P^2 gebildet wird, auch eine zu μ senkrechte Fokalachse von P^2. Der parabolische Ebenenzylinder und P^2 haben dieselbe Direktrixebene π. Sie steht senkrecht auf $\mathfrak{c}_1$ und ihr auf $\mathfrak{c}_1$ gelegener Abstand von $\mathfrak{f}_\mu$ wird vom Scheitelpunkte $ml = P$ von P^2 gehälftet. Die Direktrixebene π von P^2 ist also mit Hilfe des zu μ senkrechten Strahles $\mathfrak{f}_\mu$ des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 und des mit μ inzidenten Kongruenzstrahles m ohne weiteres zu konstruieren. Für eine durch eine Nebensymmetrieachse gehende Achsenebene μ von C_1^1 haben wir hiermit ebenfalls eine sich aus Eigenschaften der Kongruenz ergebende Konstruktion der Direktrixebene π des μ zugehörigen Scheitelstrahlenparaboloides P^2.

Eine Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer

---

[17]) A. a. O. [1]), Nr. 9.

gemeinsamen, durch eine Nebensymmetrieachse von C_1^1 gehenden Symmetrieebene hat [10]) eine weitere durch diese Nebensymmetrieachse gehende gemeinsame Symmetrieebene ε. Die Ebenen μ, ε sind miteinander wechselweise orthogonal verknüpft. Eine solche Büschelschar enthält folglich zwei scheitelrechte Hyperboloide, das eine mit einer auf ε und das andere mit einer auf μ senkrechten charakteristischen Hauptachse. Alle einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit einer Nebensymmetrieachse der Kongruenz als gemeinsamer Hauptachse bilden aber ein durch eine Büschelschar scheitelrechter Hyperboloide gehendes Bündelheer (vgl. **22**), und zwei Büschelscharen eines Bündelheeres schneiden einander stets in einer Fläche. Demnach ist erwiesen:

In einer Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit zwei zueinander senkrechten, d. h. mit einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 inzidenten Symmetrieebenen μ, ε, liegen zwei scheitelrechte Hyperboloide mit auf μ, ε bzw. senkrechten charakteristischen Hauptachsen und ein scheitelrechtes Hyperboloid, dessen charakteristische Hauptachse die Nebensymmetrieachse selbst ist. Der Parallelenbüschel des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades in jeder der beiden Ebenen μ, ε geht durch die charakteristische Hauptachse je eines einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloides.

24. Unter den Büschelscharen einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades hat nur die Büschelschar der Antidurchmesserflächen drei gemeinsame Symmetrieebenen. Es sind dies die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 sowie die beiden Verbindungsebenen der Hauptsymmetrieachse c_d mit den beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ der Kongruenz [2]). Die scheitelrechten Antidurchmesserhyperboloide mit bzw. den charakteristischen Symmetrieebenen $c_d\mathfrak{c}_1$, $c_d\mathfrak{c}_2$ sind die früher gefundenen [15]) scheitelrechten Antidurchmesserhyperboloide bzw. mit den charakteristischen Hauptachsen $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_1$. Das scheitelrechte Antidurchmesserhyperboloid mit der charakteristischen Symmetrieebene γ ist [3]) identisch mit dem einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Rotationsparaboloide P_∞^2. Seine charakteristischen Hauptachsen sind die ∞^1 zur Fluchtebene γ senkrechten uneigentlichen Geraden. Sie sind die Schnitte der uneigentlichen Ebene als der Direktrixebene von P_∞^2 mit den γ orthogonal verknüpften ∞^1 Ebenen [6]) der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1. Das zerfallene Rotationsparaboloid P_∞^2 bestimmt hiernach als scheitelrechtes Hyperboloid, abweichend von allen übrigen einscharig in C_1^1 gelegenen scheitelrechten Hyperboloiden, nicht nur eine, sondern ∞^1 charakteristische Hauptachsen. Nach den Nummern **21—23** und dieser Nummer haben wir zusammengefaßt:

Jede eigentliche Achsenebene einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist die charakteristische Symmetrieebene je eines einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloides. Insbesondere ist die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 die charakteristische Symmetrieebene des als scheitelrechtes Hyperboloid anzusehenden einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Rotationsparaboloides P_∞^2. Als scheitelrechtes Hyperboloid hat diese zerfallene Fläche ∞^1 zur Fluchtebene γ senkrechte charakteristische Hauptachsen. Alle liegen in der uneigentlichen Ebene und bilden den vom uneigentlichen Punkte C'_∞ der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 ausgehenden Strahlenbüschel erster Ordnung. Die uneigentliche Gerade jedes Büschels zu γ senkrechter Parallelen ist stets eine dieser ∞^1 charakteristischen Hauptachsen. Im Hauptachsenkomplex Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades liegt in jedem Parallelenbüschel mit einer nicht zur Fluchtebene γ parallelen

Trägerebene die charakteristische Hauptachse eines einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloides.

25. Nachdem in Nummer **24** jede eigentliche Achsenebene einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 als charakteristische Symmetrieebene eines einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloides festgelegt worden ist, wenden wir uns dazu, diese Untersuchung auf die *uneigentliche* Ebene als Achsenebene von C_1^1 auszudehnen.

Bei einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit der uneigentlichen Ebene als gemeinsamer Symmetrieebene — also bei einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener, längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührenden Paraboloide — ist das ihr zugehörige Scheitelstrahlenparaboloid P^2 gleichseitig (vgl. **16**). Die parallelen Hauptachsen der Büschelscharparaboloide liegen in einer zweimal berührenden Ebene ε des dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 von C_1^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3; sie schneiden einen der beiden in ε enthaltenen Regelstrahlen von C^3 — etwa den Regelstrahl $\mathfrak{c}_m$ — rechtwinklig. Jeder der in C_1^1 gelegenen Strahlen des gleichseitigen Scheitelstrahlenparaboloides P^2 steht auf dem $\mathfrak{c}_m$ rechtwinklig kreuzenden Regelstrahl $\mathfrak{c}_m^n$ von C^3 senkrecht. Somit verbindet die hier mit der eigentlichen Scheitelebene von P^2 vereinigte Direktrixebene π dieses Paraboloides den Regelstrahl $\mathfrak{c}_m^n$ mit der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 und schneidet ε in der mit c_d inzidenten eigentlichen Hauptachse des durch $\mathfrak{c}_m$ gehenden gleichseitigen Paraboloides unserer Paraboloidenbüschelschar. Jedes gleichseitige Paraboloid ist zugleich auch ein scheitelrechtes Hyperboloid, dessen charakteristische Hauptachse mit der eigentlichen Hauptachse des Paraboloides vereint ist, und dessen charakteristische Symmetrieebene auf die uneigentliche Ebene fällt. Als Ergebnis haben wir folglich:

Jedes einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltene gleichseitige Paraboloid ist als das scheitelrechte Hyperboloid einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit der uneigentlichen Ebene als gemeinsamer Symmetrieebene anzusehen, d. h. als das scheitelrechte Hyperboloid einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener, längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührenden Paraboloide. Die eigentliche Hauptachse jedes solchen gleichseitigen Paraboloides — also die charakteristische Hauptachse des mit ihm identischen scheitelrechten Hyperboloides — ist die Schnittgerade der Direktrixebene π des der Paraboloidenbüschelschar zugehörigen gleichseitigen Scheitelstrahlenparaboloides P^2 mit der Trägerebene ε des Büschels paralleler Hauptachsen der Büschelscharparaboloide.

26. Aus den in den Nummern **24** und **25** bewiesenen Sätzen baut sich der sie erschöpfende Hauptsatz auf:

Hauptsatz. *Jede Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer Achsenebene μ von C_1^1 als gemeinsamer Symmetrieebene geht durch ein scheitelrechtes Hyperboloid mit einer zu μ senkrechten charakteristischen Hauptachse. Die μ orthogonal verknüpfte Ebene ε, also die Ebene paralleler zu μ senkrechten Hauptachsen jeder solchen Büschelschar, und die Direktrixebene π des der Büschelschar zugehörigen Scheitelstrahlenparaboloides P^2 schneiden einander in der charakteristischen Hauptachse dieses scheitelrechten Hyperboloides* [18]). *Nur wenn die Achsenebene*

[18]) Für die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 als Achsenebene μ von C_1^1 ist das vorstehende, für alle anderen Achsenebenen μ Geltende gemäß Nummer **24** umzugestalten.

μ die uneigentliche Ebene ist — d. h. eine Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener, längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührenden Paraboloide vorliegt — ist das in der Büschelschar enthaltene einzige scheitelrechte Hyperboloid identisch mit einem gleichseitigen Paraboloid. — Die Parallelenbüschel des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades gehen je durch die charakteristische Hauptachse eines einzigen einscharig in der Kongruenz enthaltenen scheitelrechten Hyperboloides. Diese ist nur dann die eigentliche Hauptachse eines einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloides, wenn die Trägerebene des Parallelenbüschels parallel zur Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 läuft. In einer linearen Strahlenkongruenz liegen einscharig ∞^2 scheitelrechte Hyperboloide einschließlich der ∞^1 einscharig in ihr enthaltenen gleichseitigen Paraboloide.

27. Es sei μ eine zu keiner Nebensymmetrieachse einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 senkrechte noch mit ihr inzidente eigentliche Achsenebene von C_1^1. In der μ orthogonal verknüpften Ebene ε liegt ein zu der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 paralleler Regelstrahl $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ des dem gleichseitigen Fokalparaboloid C_1^1 der Kongruenz orthogonal verknüpften Zylindroides C^3. Dreht sich ε um $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$, so beschreibt (vgl. **20**) die Ebene μ einen zum Ebenenbüschel erster Ordnung $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}(\varepsilon\ldots)$ projektiven, durch die Fluchtebene γ gehenden parabolischen Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$. Beide projektiven Gebilde sind perspektiv zum nämlichen Parallelenbüschel $\gamma(\mathfrak{m}\ldots)$ von γ. Im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} ist dem parabolischen Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$ der ebenfalls durch γ gehende parabolische Ebenenzylinder $\mathsf{M}'^2(\mu'\ldots)$ zugeordnet. Die zu seinen Ebenen μ' senkrechten Strahlen $e_{\mu'}$ von C_1^1 schneiden die uneigentliche Ebene in den Punkten $E'_{\mu'\infty}$ einer zu $\mathsf{M}'^2(\mu'\ldots)$ projektiven Punktreihe erster Ordnung $p'_\infty(E'_{\mu'\infty}\ldots)$, und dieser Punktreihe ist in Σ_{ig} — also in der Fluchtebene γ — die Punktreihe erster Ordnung $p_\gamma(E_{\mu'}\ldots)$ der Fluchtpunkte $E_{\mu'}$ auf den Kongruenzstrahlen $e_{\mu'}$ zugeordnet [19]). Die zum parabolischen Ebenenzylinder $\mathsf{M}'^2(\mu'\ldots)$ projektive und zugleich perspektive Punktreihe $p_\gamma(E_{\mu'}\ldots)$ ist ferner projektiv zu dem $\mathsf{M}'^2(\mu'\ldots)$ in Σ_{ig} zugeordneten Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$. Sonach auch zu dem zu diesem perspektiven Parallelenbüschel $\gamma(\mathfrak{m}\ldots)$ und endlich auch zu dem zu $\gamma(\mathfrak{m}\ldots)$ wiederum perspektiven Ebenenbüschel $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}(\varepsilon\ldots)$. Es schneiden aber die aus den Fluchtpunkten $E_{\mu'}$ auf die ihnen entsprechenden Parallelen $\mathfrak{m}$ senkrecht gefällten Ebenen π die mit diesen Geraden inzidenten Ebenen ε bzw. in den zu $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ senkrechten charakteristischen Hauptachsen (vgl. **21**) einscharig in C_1^1 enthaltener scheitelrechten Hyperboloide. Folglich bilden diese in den Ebenen ε gelegenen, $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ rechtwinklig schneidenden charakteristischen Hauptachsen eine gleichseitig paraboloidische Regelschar $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_\mathfrak{m}}$. Der uneigentliche Strahl von $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_\mathfrak{m}}$ steht

---

[19]) Die Gerade p_g läßt sich einfach bestimmen. Nämlich auf der in $\mathsf{M}'^2(\mu'\ldots)$ gelegenen Fluchtebene γ steht im Mittelpunkte C der Kongruenz die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 senkrecht (vgl. **20**). Folglich ist C ein Punkt von $p_\gamma(E_{\mu'}\ldots)$. Außerdem schneiden die Kongruenzstrahlen $e_{\mu'}$ rechtwinklig je die Strahlen $\mathfrak{m}'$ des zu $\mathsf{M}'^2(\mu'\ldots)$ perspektiven Parallelbüschels $\gamma(\mathfrak{m}'\ldots)$ von γ. Also ist der uneigentliche Punkt von p_γ zugleich der Schnittpunkt der uneigentlichen Gerade aller zu den Parallelen $\mathfrak{m}'$ senkrechten Ebenen mit dem uneigentlichen Kongruenzstrahle c_∞. Er bildet hiernach auf c_∞ mit dem uneigentlichen Punkte $\mathfrak{M}'_\infty$ der Parallelen $\mathfrak{m}'$ ein Punktepaar der die konjugiert imaginären Kreispunkte bestimmenden Involution. p_γ ergibt sich somit als die Verbindungsgerade des Mittelpunktes C von C_1^1 mit dem uneigentlichen Punkte der die Parallelen $\mathfrak{m}'$ rechtwinklig schneidenden Geraden von γ.

auf der Fluchtebene γ senkrecht (vgl. **24**). Außer $\mathfrak{c}_m$ ist somit die in $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}$ gelegene eigentliche Hauptachse eines einscharig in C^1_1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloides ein Scheitelstrahl des $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}$ tragenden gleichseitigen Paraboloides $P^2_{\mathfrak{c}_m}$. Die eigentliche Hauptachse von $P^2_{\mathfrak{c}_m}$ und die Hauptsymmetrieachse c_d von C^1_1 sind demnach identisch. Also:

Ein gegebener zur Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C^1_1 paralleler Regelstrahl $\mathfrak{c}_m$ des dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 von C^1_1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 steht senkrecht auf den charakteristischen Hauptachsen von ∞^1 einscharig in C^1_1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloiden. Diese $\mathfrak{c}_m$ rechtwinklig schneidenden ∞^1 charakteristischen Hauptachsen bilden die eine Regelschar $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}$ eines gleichseitigen Paraboloides $P^2_{\mathfrak{c}_m}$. In $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}$ liegt (vgl. **24**) *die mit $\mathfrak{c}_m$ inzidente zur Fluchtebene γ senkrechte uneigentliche charakteristische Hauptachse des als scheitelrechtes Hyperboloid anzusehenden einscharig in C^1_1 enthaltenen zerfallenen Rotationsparaboloides P^2_∞ und die eigentliche Hauptachse des durch $\mathfrak{c}_m$ gehenden einscharig in C^1_1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloides. Die eigentliche Hauptachse von $P^2_{\mathfrak{c}_m}$ ist die Hauptsymmetrieachse c_d der Kongruenz.*

28. Nach den in Nummer **27** gefundenen Projektivitäten:

$$p(E_{\mu'} \ldots) \,\overline{\wedge}\, \gamma(\mathfrak{m} \ldots) \quad \text{und} \quad \gamma(\mathfrak{m} \ldots) \,\overline{\wedge}\, \mathfrak{c}_m(\varepsilon \ldots)$$

bilden die aus den Punkten $E_{\mu'}$ auf die ihnen entsprechenden Geraden $\mathfrak{m}$ senkrecht gefällten Ebenen π einen zum Parallelenbüschel $\gamma(\mathfrak{m} \ldots)$ und zum Ebenenbüschel $\mathfrak{c}_m(\varepsilon \ldots)$ projektiven Büschel paralleler Ebenen $(\pi \ldots)$. Nun sind die Ebenen ε des Büschels $\mathfrak{c}_m(\varepsilon \ldots)$ den Ebenen μ des zu ihm projektiven parabolischen Ebenenzylinders $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$ orthogonal verknüpft (vgl. **20**). Ferner sind die den Ebenen ε entsprechenden Ebenen π je die Direktrixebenen (vgl. **21**) der den Ebenen μ von $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$ zugehörigen Scheitelstrahlenparaboloide P^2. Endlich bilden (vgl. **20**) die diesen Ebenen μ zugehörigen Scheitelstrahlenparaboloide P^2 eine zum Ebenenbüschel $\mathfrak{c}_m(\varepsilon \ldots)$ projektive Büschelschar $(P^2 \ldots)$ längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührender Paraboloide. Somit folgern wir aus dem Lehrsatz in Nummer **27**:

Es sei $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$ ein durch die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C^1_1 gehender, dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 von C^1_1 umbeschriebener parabolischer Ebenenzylinder, ferner $(P^2 \ldots)$ die zu $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$ projektive Büschelschar der den Ebenen μ zugehörigen Scheitelstrahlenparaboloide P^2 und $\mathfrak{c}_m$ — der Regelstrahl des C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 — die Achse des $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$ orthogonal verknüpften Ebenenbüschels erster Ordnung $\mathfrak{c}_m(\varepsilon \ldots)$.

Dann bilden die Direktrixebenen π der Scheitelstrahlparaboloide P^2 einen sowohl zum parabolischen Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$ als auch zur Büschelschar $(P^2 \ldots)$ projektiven Parallelebenenbüschel $(\pi \ldots)$. Durch den Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$ ist der zu ihm projektive Büschel paralleler Ebenen $(\pi \ldots)$ auf den $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$ orthogonal verknüpften Ebenenbüschel erster Ordnung $\mathfrak{c}_m(\varepsilon \ldots)$ projektiv bezogen, und die projektiven Ebenenbüschel $\mathfrak{c}_m(\varepsilon \ldots)$ und $(\pi \ldots)$ erzeugen die gleichseitig paraboloidische Regelschar $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}$. Sie besteht aus denjenigen charakteristischen Hauptachsen aller in C^1_1 einscharig enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide, die $\mathfrak{c}_m$ rechtwinklig schneiden.

Wie schon oben hervorgehoben, berühren die Paraboloide der Paraboloiden-

büschelschar $(P^2 \ldots)$ einander längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ von C_1^1. Demnach gilt weiter:

Es seien die Elemente einer Büschelschar $(P^2 \ldots)$ einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener, längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührenden Paraboloide als zu Achsenebenen von C_1^1 gehörige Scheitelstrahlenparaboloide angesehen. Dann bestimmt jedes Paraboloid P^2 eine Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades, deren scheitelrechtes Hyperboloid S^2 zur charakteristischen Hauptachse einen Strahl $\mathfrak{k}_s$ einer gleichseitig paraboloidischen Regelschar $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}(\mathfrak{k}_s \ldots)$ hat. Die Büschelschar $(P^2 \ldots)$ und die gleichseitig paraboloidische Regelschar $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}(\mathfrak{k}_s \ldots)$ sind projektiv, sobald jedem Paraboloid P^2 von $(P^2 \ldots)$ die charakteristische Hauptachse $\mathfrak{k}_s$ des scheitelrechten Hyperboloides S^2 entspricht, das in der durch P^2 bestimmten Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades liegt. Der zu den Strahlen von $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}(\mathfrak{k}_s \ldots)$ senkrechte Leitstrahl $\mathfrak{c}_m$ dieser Regelschar ist ein Regelstrahl des dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 von C^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3. Die ∞^1 Büschelscharen $(P^2 \ldots)$ einscharig in C_1^1 enthaltener, längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles einander berührenden Paraboloide und die ∞^1 Regelstrahlen $\mathfrak{c}_m$ von C^3 entsprechen einander wechselseitig.

29. Die Beweise in den Nummern **27** und **28** versagen, sobald der Regelstrahl $\mathfrak{c}_m$ des dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 ersetzt wird durch eine der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C^3, etwa durch $\mathfrak{c}_1$.

Den Ebenen des Ebenenbüschels erster Ordnung $\mathfrak{c}_1(\mu \ldots)$ sind jetzt die Ebenen ε eines mit ihm kollokalen Ebenenbüschels erster Ordnung $\mathfrak{c}_1(\varepsilon \ldots)$ orthogonal verknüpft. Da hierbei jeder Ebene μ von $\mathfrak{c}_1$ die sie in $\mathfrak{c}_1$ rechtwinklig schneidende Ebene ε entspricht, so sind die beiden Ebenenbüschel projektiv. Ferner bilden jetzt nach Nummer **20** die Scheitelstrahlenparaboloide P^2 der Ebenen μ die zum Ebenenbüschel $\mathfrak{c}_1(\mu \ldots)$ projektive Büschelschar $(P^2 \ldots)$ der einscharig in C_1^1 enthaltenen, längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührenden Paraboloide P^2 mit der gemeinsamen Hauptachse $\mathfrak{c}_1$. Es gilt also die Beziehung:

(I) $$\mathfrak{c}_1(\mu \ldots) \barwedge \mathfrak{c}_1(\varepsilon \ldots) \barwedge (P^2 \ldots).$$

Zur Paraboloidenbüschelschar $(P^2 \ldots)$ ist die von $\mathfrak{c}_1$ getragene Punktreihe $\mathfrak{c}_1(P \ldots)$ der Scheitelpunkte P auf den Paraboloiden P^2 perspektiv, zu $\mathfrak{c}_1(P \ldots)$ die in C_1^1 gelegene Regelschar ${}^1\mathfrak{R}^2(m \ldots)$ des einscharig in C_1^1 gelegenen gleichseitigen Paraboloides ${}^1F^2$, das die Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_2$ der Kongruenz zur Hauptachse hat. Die gleichseitig paraboloidische Regelschar ${}^1\mathfrak{R}^2(m \ldots)$ besteht dabei aus den die Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ rechtwinklig schneidenden Kongruenzstrahlen. Je zwei einander rechtwinklig kreuzende unter ihnen — sie mögen für den Augenblick als m, m^n unterschieden sein — bilden aber bekanntlich die Strahlenpaare einer elliptischen Strahleninvolution auf unserer Regelschar, so daß wir ferner die Beziehung haben:

(II) $$(P^2 \ldots) \barwedge \mathfrak{c}_1(P \ldots) \barwedge {}^1\mathfrak{R}^2(m \ldots) \barwedge {}^1\mathfrak{R}^2(m^n \ldots).$$

Die Regelschar $\mathfrak{C}_1^2$ des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 aus den $\mathfrak{c}_1$ rechtwinklig schneidenden Strahlen trägt nun die eine Fokalinvolution von C_1^1. Jedes ihrer Strahlenpaare schneidet $\mathfrak{c}_1$ in je zwei Punkten, aus denen wechselweise zu den Strahlen des Strahlen-

paares parallele Kongruenzstrahlen hervorschießen [20]). Folglich sind die zu den Kongruenzstrahlen m^n parallelen Strahlen der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$ die früher (vgl. **23**) gefundenen mit $\mathfrak{c}_1$ inzidenten Fokalachsen $\mathfrak{f}_\mu$ der zu den Ebenen μ von $\mathfrak{c}_1$ gehörigen Scheitelstrahlenparaboloide P^2. Demnach haben wir weiter:

$$\text{(III)} \qquad {}^1\mathfrak{R}^2(m^n \ldots) \overline{\wedge} \, \mathfrak{C}_1^2(\mathfrak{f}_\mu \ldots) ,$$

und aus (II) und (III) für die zur Regelschar $\mathfrak{C}_1^2(\mathfrak{f}_\mu \ldots)$ auf $\mathfrak{c}_1$ perspektive Punktreihe $\mathfrak{c}_1(\mathfrak{F}_\mu \ldots)$:

$$\text{(IV)} \qquad \mathfrak{c}_1(\mathfrak{F}_\mu \ldots) \overline{\wedge} \, \mathfrak{c}_1(P \ldots) .$$

Durch diese zwei kollokalen projektiven Punktreihen geht ein Büschel projektiver Punktreihen. Seine projektiven Punktreihen haben zu gemeinsamen Deckpunkten den Mittelpunkt C der Kongruenz sowie den uneigentlichen Punkt $\mathfrak{C}_{1\infty}$ von $\mathfrak{c}_1$. Folglich bleiben für die Punkte D einer dritten projektiven Punktreihe $\mathfrak{c}_1(D \ldots)$, die den homologen Punkten $\mathfrak{F}_\mu$, P von $\mathfrak{c}_1(\mathfrak{F}_\mu \ldots)$ und $\mathfrak{c}_1(P \ldots)$ entsprechen, die Würfe $\mathfrak{F}_\mu P D \mathfrak{C}_{1\infty}$ projektiv. Es seien nun diese Würfe harmonisch. Es hälfte also P stets den Abstand $\mathfrak{F}_\mu D$. Dann sind die Punkte D inzident mit den $\mathfrak{c}_1$ rechtwinklig schneidenden Direktrixebenen π unserer einscharig in C_1^1 enthaltenen Scheitelstrahlenparaboloide P^2 mit der gemeinsamen Hauptachse $\mathfrak{c}_1$. Die Direktrixebenen π bilden somit einen zur Punktreihe $\mathfrak{c}_1(P \ldots)$ und folglich auch nach (II) zur Büschelschar $(P_\infty^2 \ldots)$ der Scheitelstrahlenparaboloide P^2 projektiven Parallelebenenbüschel $(\pi \ldots)$. Hieraus ergibt sich in Verbindung mit (I):

$$\text{(V)} \qquad \mathfrak{c}_1(\mu \ldots) \overline{\wedge} \, \mathfrak{c}_1(\varepsilon \ldots) \overline{\wedge} \, (P^2 \ldots) \overline{\wedge} \, (\pi \ldots) .$$

Jede Ebene μ von $\mathfrak{c}_1$ ist als Achsenebene der Kongruenz die gemeinsame Symmetrieebene einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades. Die Direktrixebene π des der Ebene μ zugehörigen Scheitelstrahlenparaboloides P^2 schneidet dabei (vgl. **23**) die der Ebene μ orthogonal verknüpfte Ebene ε in der zu μ senkrechten charakteristischen Hauptachse eines in der Büschelschar gelegenen scheitelrechten Hyperboloides. Beschreibt μ den Ebenenbüschel $\mathfrak{c}_1(\mu \ldots)$, so erzeugen nach (V) die den Ebenen μ entsprechenden Ebenen ε, π in den zu $\mathfrak{c}_1(\mu \ldots)$ projektiven Ebenenbüscheln $\mathfrak{c}_1(\varepsilon \ldots)$ und $(\pi \ldots)$ eine gleichseitig paraboloidische Regelschar $\mathfrak{P}_{\mathfrak{c}_1}^2$ aus $\mathfrak{c}_1$ rechtwinklig schneidenden Strahlen. Und es folgt als Ergänzung der Lehrsätze in Nummer **28** und **29**:

Auch jede der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_i (i = 1, 2)$ *des dem gleichseitigen Fokalparaboloid* C^2 *einer linearen Strahlenkongruenz* C_1^1 *orthogonal verknüpften Zylindroides* C^3 *schneidet rechtwinklig die charakteristischen Hauptachsen von* ∞^1 *einscharig in* C_1^1 *enthaltenen scheitelrechten Hyperboloiden. Diese Hauptachsen bilden eine gleichseitig paraboloidische Regelschar* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{c}_i}^2$. *Die Regelschar* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{c}_i}^2$ *geht durch eine Nebensymmetrieachse von* C_1^1 *und den mit* $\mathfrak{c}_i$ *inzidenten zur Fluchtebene* γ *des geschart involutorischen Raumes* Σ_{ig} *von* C_1^1 *senkrechten uneigentlichen Strahl. Als eigentliche Hauptachse des* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{c}_i}^2$ *tragenden gleichseitigen Paraboloides* $P_{\mathfrak{c}_i}^2$ *ergibt sich wiederum* (vgl. **27**) *die Hauptsymmetrieachse* c_d *von* C_1^1.

Aus dem Beweise vorstehenden Lehrsatzes folgt zugleich die Gültigkeit der im zweiten Lehrsatze von Nummer **28** ausgesprochenen Ergebnisse.

30. Die charakteristische Hauptachse jedes einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloides steht als Strahl des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades entweder

[20]) A. a. O. [5]), Nr. 17.

senkrecht auf einem Regelstrahle des dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 von C_1^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 oder ist mit einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 vereinigt (vgl. **16**). Daher schließen wir aus den Nummern **27—29** den wichtigen Lehrsatz:

Die Kongruenz aus den charakteristischen Hauptachsen der einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide wird erschöpft durch ∞^1 gleichseitig paraboloidische Regelscharen $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}$ und die ∞^1 mit jeder der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 vereinigten charakteristischen Hauptachsen. Jeder Regelstrahl $\mathfrak{c}_m$ des dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 von C_1^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 schneidet rechtwinklig die Strahlen je einer Regelschar $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}$. Die Trägerparaboloide $P^2_{\mathfrak{c}_m}$ dieser ∞^1 gleichseitig paraboloidischen Regelscharen haben die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 zur gemeinsamen Hauptachse.

Zu weiteren Eigenschaften der Kongruenz aus den charakteristischen Hauptachsen der einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide führen die folgenden Nummern. In ihnen werden im Hinblick auf die Konstruktion dieser Hauptachsen die Beziehungen zwischen den einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloiden P^2 und den ihnen zugehörigen Achsenebenen μ weiter ausgebaut; ferner die zwischen den Paraboloiden P^2 und ihren Direktrixebenen π, sowie die zwischen jenen Achsenebenen μ und den ihnen orthogonal verknüpften Ebenen ε.

31. Bei je zwei eigentlichen Tangentenebenen μ_1, μ_2 des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist die Schnittgerade $\mu_1\mu_2 = \mathfrak{p}_{12}$ parallel zu dem eigentlichen gemeinsamen Kongruenzstrahle p der zu diesen Achsenebenen von C_1^1 bzw. gehörigen Scheitelstrahlenparaboloide P_1^2, P_2^2. Durch $P_1^2 P_2^2$ geht eine Büschelschar $(P^2 \ldots)$ einscharig in C_1^1 enthaltener Paraboloide. Jedes von ihnen gehört als Scheitelstrahlenparaboloid zu einer Tangentenebene μ von C^2. Jede solche Tangentenebene enthält eine Parallele zum Kongruenzstrahle p. Die Tangentenebenen μ schneiden folglich das Ebenenpaar $\mu_1\mu_2$ in Parallelenpaaren zu $\mathfrak{p}_{12}$ und bilden einen C^2 umbeschriebenen parabolischen Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$. Nun ist jede dieser Ebenen μ eine Durchmesserebene (vgl. **2**) des ihr zugehörigen Scheitelstrahlenparaboloides P^2. Ferner bilden die Berührungspunkte der Büschelscharparaboloide P^2 mit der uneigentlichen Ebene auf dem uneigentlichen Kongruenzstrahle c_∞ eine zur Büschelschar $(P^2 \ldots)$ perspektive Punktreihe. Zu ihr liegt der parabolische Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$ perspektiv. Folglich schließen wir mit Rücksicht auf Nummer **20**:

Je ∞^1 Tangentenebenen μ des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1, deren zugehörige Scheitelstrahlenparaboloide P^2 eine Büschelschar $(P^2 \ldots)$ bilden, erfüllen einen zur Büschelschar projektiven parabolischen Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$. Zu seiner uneigentlichen Ebene gehört als Scheitelstrahlenparaboloid das gleichseitige Büschelscharparaboloid (vgl. **19**). *$\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$ sendet je eine Ebene durch jede der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1.*

Alle ∞^2 Büschelscharen $(P^2 \ldots)$ einscharig in C_1^1 enthaltener Paraboloide P^2 und die ∞^2 dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 umbeschriebenen parabolischen Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$ bedingen einander wechselseitig. Unter den ∞^2 Büschelscharen sind ∞^1, deren Paraboloide längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞

einander berühren (vgl. **20**). Ihnen sind die C^2 umbeschriebenen, durch die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 gehenden ∞^1 parabolischen Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$ zugeordnet. Alle ∞^2 Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$ senden je einen Schnittstrahl zweier ihrer Ebenen durch den Mittelpunkt C von C_1^1. Insbesondere ist die Hauptsymmetrieachse c_d der Kongruenz der Schnittstrahl zweier Asymptotenebenen des in die beiden Büschel von Asymptotenebenen zerfallenen C^2 umbeschriebenen parabolischen Ebenenzylinders. Jeder mit der Fluchtebene γ inzidente Strahl von C ist der Berührungsstrahl von γ mit je einem durch γ gehenden Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$.

32. Die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 schneidet die ∞^2 dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 von C_1^1 umbeschriebenen parabolischen Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$ in den Elementen eines Heeres von Strahlenparabeln $\mu_\gamma^2(\mathfrak{m}\ldots)$, die durch die Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ der Kongruenz C_1^1 gehen. Das Heer dieser Strahlenparabeln ist zugleich der Schnitt der Fluchtebene γ mit den Ebenenkegeln zweiter Ordnung $E^2(\varepsilon\ldots)$ aus den Punkten E des C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 nach den Strahlen der Regelschar $\mathfrak{C}^3$ von C^3. Jede der $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ enthaltenden Strahlenparabeln $\mu_\gamma^2(\mathfrak{m}\ldots)$ liegt hiernach perspektiv sowohl zu einem Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$ wie auch zu einem Ebenenkegel $E^2(\varepsilon\ldots)$.

Zwei gegebenen Ebenen μ_1, μ_2 eines C^2 umbeschriebenen Ebenenzylinders $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$ seien bzw. die Ebenen ε_1, ε_2 orthogonal verknüpft. Da in ε_1 wie ε_2 je ein Regelstrahl von C^3 liegt, so hat die Schnittgerade $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \mathfrak{e}$ außer den mit diesen beiden Regelstrahlen inzidenten Punkten noch einen dritten Punkt E mit C^3 gemein. Der aus ihm die Regelschar $\mathfrak{C}^3$ projizierende Ebenenkegel $E^2(\varepsilon\ldots)$ geht außer durch die beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ noch durch die mit der Fluchtebene γ inzidenten Träger $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ der orthogonalen Ebenenpaare $\mu_1\varepsilon_1$, $\mu_2\varepsilon_2$. Die Schnittparabel von γ mit dem Ebenenkegel $E^2(\varepsilon\ldots)$ ist also ebenfalls $\mu_\gamma^2(\mathfrak{m}\ldots)$. Somit liegt sowohl der Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$ wie auch der Ebenenkegel $E^2(\varepsilon\ldots)$ zur nämlichen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ enthaltenden Strahlenparabel perspektiv. Durch jeden Strahl $\mathfrak{m}$ dieser Strahlenparabel $\mu_\gamma^2(\mathfrak{m}\ldots)$ geht aber außer der durch alle Strahlen $\mathfrak{m}$ gehenden zweifachen Tangentenebene γ von C^3 noch je eine einfache Tangentenebene dieses Zylindroides. Folglich erschöpfen alle mit den Ebenen μ des Ebenenzylinders $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$ orthogonal verknüpften Ebenen ε den Ebenenkegel $E^2(\varepsilon\ldots)$. Oder:

Jedem der ∞^2 dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 umbeschriebenen parabolischen Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$ ist je ein zur Regelschar $\mathfrak{C}^3$ des C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 perspektiver Ebenenkegel zweiter Ordnung $E^2(\varepsilon\ldots)$ orthogonal verknüpft. Umgekehrt bestimmt jeder zu $\mathfrak{C}^3$ perspektive Ebenenkegel zweiter Ordnung einen C^2 umbeschriebenen parabolischen Ebenenzylinder, dem er orthogonal verknüpft ist. Jedes Paar solcher orthogonal verknüpften Gebilde $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$ $E^2(\varepsilon\ldots)$ ist projektiv und wird von der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 in einer durch die beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ der Kongruenz gehenden Strahlenparabel $\mu_\gamma^2(\mathfrak{m}\ldots)$ geschnitten.

33. Jedes Paraboloid einer gegebenen Büschelschar $(P^2\ldots)$ einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Paraboloide P^2 gehört als Scheitelstrahlen-

paraboloid (vgl. **31**) zu einer Ebene μ eines parabolischen Ebenenzylinders $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$. Alle Ebenen von $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$ sind Achsenebenen von C_1^1. Zwei von ihnen schneiden einander rechtwinklig in einem Kongruenzstrahl $k_\mathfrak{m}$. Sein uneigentlicher Punkt M'_∞ ist der Mittelpunkt des Ebenenzylinders $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$. Der dem Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$ im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 zugeordnete Ebenenkegel zweiter Ordnung $M^2(\mu'\ldots)$ hat somit einen Punkt M der Fluchtebene γ, den Fluchtpunkt des Kongruenzstrahles $k_\mathfrak{m}$, zum Mittelpunkte. Alle Ebenen μ' von $M^2(\mu'\ldots)$ sind ebenfalls Achsenebenen der Kongruenz, und die beiden mit $k_\mathfrak{m}$ inzidenten in Σ_{ig} einander zugeordneten Achsenebenen liegen sowohl in $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$ wie in $M^2(\mu'\ldots)$. Die Senkrechten zu den Ebenen μ' im Mittelpunkt von $M^2(\mu'\ldots)$ bilden einen zu diesem Ebenenkegel projektiven Strahlenkegel zweiter Ordnung. Sein uneigentlicher Kegelschnitt ist perspektiv zur biquadratischen Regelschar $\mathfrak{R}^4(e_{\mu'}\ldots)$ aus den zu den Ebenen μ' senkrechten Kongruenzstrahlen $e_{\mu'}$, und die Regelschar $\mathfrak{R}^4(e_{\mu'}\ldots)$ ist durch ihn projektiv auf den Ebenenkegel $M^2(\mu'\ldots)$ bezogen. In der Fluchtebene γ erfüllen somit die Fluchtpunkte $E_{\mu'}$ der zu den Ebenen μ' senkrechten Kongruenzstrahlen $e_{\mu'}$, einen zum Ebenenkegel $M^2(\mu'\ldots)$ projektiven Kegelschnitt $m_\gamma^2(E_{\mu'}\ldots)$. Er liegt, da der mit M inzidente Kongruenzstrahl $k_\mathfrak{m}$ auf einer Ebene von $M^2(\mu'\ldots)$ senkrecht steht, perspektiv zu diesem Ebenenkegel. Nun schneidet die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 die in $M^2(\mu'\ldots)$ enthaltene Fluchtebene γ rechtwinklig. Folglich geht der Kegelschnitt $m_\gamma^2(E_{\mu'}\ldots)$ außer durch M auch durch den Mittelpunkt C der Kongruenz, wobei er in M den $k_\mathfrak{m}$ rechtwinklig schneidenden Strahl von γ berührt. Der mit der Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ von C_1^1 inzidenten Ebene von $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$ ist ferner in Σ_{ig} die zu $\mathfrak{c}_1$ senkrechte Ebene μ' des Punktes M zugeordnet, und der zu μ' senkrechte Kongruenzstrahl ist c_∞. Daher ist der uneigentliche Punkt der von M auf $\mathfrak{c}_1$ gefällten Senkrechten, d. h. der uneigentliche Punkt $\mathfrak{C}_{2\infty}$ der Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1, ein uneigentlicher Punkt des Kegelschnittes $m_\gamma^2(E_{\mu'}\ldots)$. Gleiches gilt für den uneigentlichen Punkt der mit M inzidenten Senkrechten zur Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_2$, d. h. dem uneigentlichen Punkte $\mathfrak{C}_{1\infty}$ von $\mathfrak{c}_1$. Kurz: der Kegelschnitt $m_\gamma^2(E_\mu,\ldots)$ erweist sich als eine gleichseitige Hyperbel mit den Asymptotenrichtungen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$. Er ist durch diese, seine Punkte M, C und durch die Tangente in M bestimmt. Fällt der dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 von C_1^1 umbeschriebene Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu\ldots)$ nacheinander auf die übrigen C^2 umbeschriebenen parabolischen Ebenenenzylinder, so laufen die durch sie bestimmten gleichseitigen Hyperbeln $m_\gamma^2(E_{\mu'}\ldots)$ durch den Mittelpunkt C und die uneigentlichen Punkte $\mathfrak{C}_{1\infty}$, $\mathfrak{C}_{2\infty}$ der Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ der Kongruenz. Sie liegen hiernach in einem Bündel gleichseitiger Hyperbeln. Aber sie erschöpfen ihn auch. Sei nämlich x^2 eine gegebene gleichseitige Bündelhyperbel, a, b ein Paar sie in je einem Punkte schneidender Kongruenzstrahlen, und stehe in der Fluchtebene γ auf a die Gerade $\mathfrak{a}$, auf b die Gerade $\mathfrak{b}$ senkrecht. Dann gibt es, wie eben in dieser Nummer gezeigt, eine durch a, b gehende biquadratische Regelschar $\mathfrak{R}^4$ von C_1^1, deren Strahlen je die Strahlen des $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ verbindenden Strahlenbüschels erster Ordnung rechtwinklig schneiden. Die Regelschar $\mathfrak{R}^4$ hat mit γ eine gleichseitige Hyperbel unseres Bündels gemein. Diese geht durch die auf a, b gelegenen Punkte von γ und ist folglich x^2.

Für den weiter durchzuführenden Beweis entnehmen wir den Überlegungen am Anfange der Nummer:

$$\text{(I)} \qquad (P^2\ldots)\,\overline{\wedge}\,\mathsf{M}^2(\mu\ldots)\,\overline{\wedge}\,M^2(\mu'\ldots)\,\overline{\wedge}\,m_\gamma^2(E_{\mu'}\ldots).$$

Aus (I) folgt:

(II) $$(P^2 \ldots) \barwedge m_\gamma^2(E_{\mu'} \ldots).$$

Ferner liegt in der Fluchtebene γ eine zum parabolischen Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$ perspektive Strahlenparabel $\mu_\gamma^2(\mathfrak{m} \ldots)$; und es ist nach (I):

(III) $$m_\gamma^2(E_{\mu'} \ldots) \barwedge \mu_\gamma^2(\mathfrak{m} \ldots).$$

Die mit den Fluchtpunkten $E_{\mu'}$ inzidenten, zu den ihnen entsprechenden Fluchtgeraden $\mathfrak{m}$ senkrechten Ebenen sind nun (vgl. **21**) die Direktrixebenen π der den Achsenebenen μ zugehörigen Scheitelstrahlenparaboloide P^2. Sie schneiden die Fluchtebene γ in Senkrechten $\mathfrak{p}_\gamma$ der jenen Punkten $E_{\mu'}$ entsprechenden Strahlen $\mathfrak{m}$. Die Strahlenparabel $\mu_\gamma^2(\mathfrak{m} \ldots)$ ist projektiv zu jedem Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Elemente zu den ihrigen parallel sind. Folglich bilden die uneigentlichen Punkte der je die Fluchtgeraden $\mathfrak{m}$ rechtwinklig schneidenden Geraden $\mathfrak{p}_\gamma$ eine zur Strahlenparabel $\mu_\gamma^2(\mathfrak{m} \ldots)$, und somit zur gleichseitigen Hyperbel $m_\gamma^2(E_{\mu'} \ldots)$ projektive uneigentliche Punktreihe. Zu Deckpunkten hat diese Hyperbel und die zu ihr projektive uneigentliche Punktreihe die uneigentlichen Punkte $\mathfrak{C}_{1\infty}, \mathfrak{C}_{2\infty}$ der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ von C_1^1. Das Erzeugnis beider projektiven Punktreihen ist demnach ein zu ihnen projektiver Strahlenbüschel erster Ordnung $P_n(\mathfrak{p}_\gamma \ldots)$. Da in jedem Strahle $\mathfrak{p}_\gamma$ die Direktrixebene π je eines Paraboloides P^2 der Büschelschar $(P^2 \ldots)$ rechtwinklig die Fluchtebene γ schneidet, erschöpfen die Direktrixebenen π der Büschelscharparaboloide einen zur gleichseitigen Hyperbel $m_\gamma^2(E_{\mu'} \ldots)$ perspektiven, und somit nach (II) zur Büschelschar projektiven Ebenenbüschel erster Ordnung $p_n(\pi \ldots)$ mit einer zu γ senkrechten Achse p_n. Also ist dargetan:

Zu jeder Büschelschar $(P^2 \ldots)$ einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Paraboloide P^2 gehört ein zur Büschelschar projektiver Ebenenbüschel erster Ordnung $p_n(\pi \ldots)$ aus den Direktrixebenen π der Büschelscharparaboloide. Seine Achse p_n steht senkrecht auf der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1. Insbesondere bilden die Direktrixebenen π der Paraboloide P^2 in jeder der Büschelscharen $(P^2 \ldots)$ einscharig in C_1^1 enthaltener, längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles einander berührenden Paraboloide (vgl. **28**) *einen zu $(P^2 \ldots)$ projektiven Büschel paralleler, zur Fluchtebene γ senkrechten Ebenen $(\pi \ldots)$.*

Jedes gleichseitige Paraboloid hat seine Scheitelebene zur Direktrixebene, und alle einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide bilden eine Büschelschar, ihre Scheitelebenen den von der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 ausstrahlenden Ebenenbüschel erster Ordnung. Sonach ergibt sich bei einer gegebenen Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Paraboloide $(P^2 \ldots)$, wenn $p_n(\pi \ldots)$ der von ihren Direktrixebenen π gebildete Ebenenbüschel erster Ordnung ist, die p_n mit der Hauptsymmetrieachse c_d verbindende Ebene als die Direktrixebene des gleichseitigen Büschelscharparaboloides.

In dem parabolischen Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$, zu dem die Paraboloide P^2 der Büschelschar $(P^2 \ldots)$ als Scheitelstrahlenparaboloide gehören, liegt ein Paar im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} einander zugeordneter Ebenen μ, μ'. Die zu diesen aufeinander senkrechten Ebenen μ, μ' gehörigen Scheitelstrahlenparaboloide P^2 senden wechselweise ihre Direktrixebenen π durch die Fluchtpunkte der je auf μ, μ' senkrechten Kongruenzstrahlen (vgl. **21**). Als Schnitt dieser zwei Direktrixebenen π ist die Achse p_n

des Ebenenbüschels erster Ordnung $p_n(\pi \ldots)$ aus den Direktrixebenen π der Büschelscharparaboloide leicht zu ermitteln.

34. C^2 sei das gleichseitige Fokalparaboloid einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1, und C^3 das C^2 orthogonal verknüpfte Zylindroid. Dann (vgl. **28**) entsprechen den Büschelscharen einscharig in C_1^1 enthaltener, längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührenden Paraboloide P^2 wechselseitig die Regelstrahlen $\mathfrak{c}_m$ von C^3. Und zwar schneiden die Direktrixebenen π der Paraboloide jeder solchen Büschelschar rechtwinklig den ihr entsprechenden Regelstrahl $\mathfrak{c}_m$. Jedes einscharig in C_1^1 enthaltene Paraboloid liegt in einer dieser ∞^1 Büschelscharen, ferner gibt es für jede zur Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 parallele Richtung einen diese Richtung weisenden Regelstrahl $\mathfrak{c}_m$ von C^3. Folglich ist jede auf γ senkrechte Ebene die Direktrixebene eines einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloides, jeder Büschel erster Ordnung solcher Ebenen zugleich ein Büschel von Direktrixebenen einer zu ihm projektiven Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Paraboloide (vgl. **33**). Damit haben wir das wichtige Ergebnis:

Die Direktrixebenen π der ∞^2 einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Paraboloide bilden den Bündel der zur Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 senkrechten Ebenen. Jedem Büschel erster Ordnung aus Direktrixebenen π entspricht eine zugehörige Büschelschar von Paraboloiden. Das Bündelheer der einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide P^2 ist projektiv zum Bündel ihrer Direktrixebenen π.

35. Eine Büschelschar $(P^2 \ldots)$ einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Paraboloide P^2 und der parabolische Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$ sind projektiv, wenn dessen Ebenen μ die Paraboloide P^2 zu Scheitelstrahlenparaboloiden haben (vgl. **31**). Der Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$ wiederum ist projektiv zu dem im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 ihm zugeordneten Ebenenkegel zweiter Ordnung $M^2(\mu' \ldots)$, dieser (vgl. **32**) zu dem ihm orthogonal verknüpften Ebenenkegel zweiter Ordnung $E^2(\varepsilon \ldots)$. Endlich ist die Büschelschar $(P^2 \ldots)$ projektiv (vgl. **33**) zu dem Ebenenbüschel erster Ordnung $p_n(\pi \ldots)$ aus den Direktrixebenen π ihrer Paraboloide P^2. Aus den Projektivitäten:

$$(P^2 \ldots) \barwedge \mathsf{M}^2(\mu \ldots) \barwedge M^2(\mu' \ldots) \barwedge E^2(\varepsilon \ldots), \qquad (P^2 \ldots) \barwedge p_n(\pi \ldots)$$

folgt:

$$p_n(\pi \ldots) \barwedge E^2(\varepsilon \ldots).$$

Der Ebenenbüschel erster Ordnung $p_n(\pi \ldots)$ erzeugt mit dem zu ihm projektiven Ebenenkegel zweiter Ordnung $E^2(\varepsilon \ldots)$ eine zu beiden perspektive, und folglich zur Büschelschar $(P^2 \ldots)$ projektive kubische Regelschar $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$. Jeder Strahl $\mathfrak{k}_n$ von $\mathfrak{R}^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$ ist (vgl. **21**) die charakteristische Hauptachse je eines einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloides S_n^2. Da p_n jeder eigentliche zur Fluchtebene γ von Σ_{ig} senkrechte Strahl sein kann (vgl. **34**), gilt:

Jeder zur Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 senkrechte eigentliche Strahl p_n ist die Doppelpunktsgerade einer kubischen Regelfläche R_n^3, deren Regelschar $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$ aus den charakteristischen Hauptachsen $\mathfrak{k}_n$ von ∞^1 einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloiden S_n^2 besteht. Den zur Regel-

schar $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$ *perspektiven Ebenenbüschel erster Ordnung* $p_n(\pi \ldots)$ *bilden* (vgl. **33**) *die Direktrixebenen* π *der Paraboloide* P^2 *aus der zu ihm projektiven Büschelschar* $(P^2 \ldots)$ *einscharig in* C_1^1 *enthaltener Paraboloide. Der Ebenenbüschel* $p_n(\pi \ldots)$ *bezieht die zu ihm perspektive kubische Regelschar* $\mathfrak{R}^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$ *projektiv auf die Büschelschar* $(P^2 \ldots)$.

Für die mit der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 vereinigte Senkrechte p_n von γ — also für die Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener gleichseitiger Paraboloide — ist die kubische Regelschar $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$ zylindroidisch. Sie ist identisch mit der Regelschar des dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 von C_1^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3, nachdem dieses um die Hauptsymmetrieachse c_d eine Drehung von 90^0 ausgeführt hat, $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$ also in die Regelschar von $C^3_{\frac{\pi}{2}}$ übergegangen ist [21]).

36. Es bestehe nunmehr in Nummer **35** die Büschelschar $(P^2 \ldots)$ aus einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen, längs des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührenden Paraboloiden. Dann bedarf der dort abgeleitete Lehrsatz einer Erläuterung. Der zur Büschelschar $(P^2 \ldots.)$ projektive parabolische Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$, dessen Ebenen μ die Paraboloide P^2 als Scheitelstrahlenparaboloide haben, liegt jetzt (vgl. **20**) perspektiv zu einem Parallelenbüschel $\gamma(\mathfrak{m} \ldots)$ in der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1. Außerdem ist der dem Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$ orthogonal verknüpfte, ebenfalls zur Büschelschar $(P^2 \ldots)$ projektive Ebenenkegel zweiter Ordnung $E^2(\varepsilon \ldots)$ ausgeartet in zwei Ebenenbüschel erster Ordnung. Die Achse des einen ist der zu den Parallelen $\mathfrak{m}$ parallele Regelstrahl $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ des dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 von C_1^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3, die Achse des andern die Hauptsymmetrieachse c_d der Kongruenz. Endlich besteht (vgl. **33**) der zur Büschelschar $(P^2 \ldots)$ projektive Ebenenbüschel erster Ordnung $p_n(\pi \ldots.)$ aller Direktrixebenen der Büschelscharparaboloide P^2 aus den zum Regelstrahle $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ von C^3 senkrechten Ebenen. Die durch die Büschelschar $(P^2 \ldots)$ projektiv (vgl. **35**) aufeinander bezogenen Gebilde $E^2(\varepsilon \ldots)$ und $p_n(\pi \ldots)$ erzeugen demnach hier eine zerfallene kubische Regelschar $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$. Sie setzt sich zusammen aus der in Nummer **27** gefundenen gleichseitig paraboloidischen Regelschar $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_\mathfrak{m}}$ und aus dem von dem uneigentlichen Punkte C'_∞ der Hauptsymmetrieachse c_d ausstrahlenden uneigentlichen Strahlenbüschel erster Ordnung (vgl. **24**). Die kubische Trägerfläche R_n^3 von $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$ ist somit zerspalten in das gleichseitige Paraboloid $P^2_{\mathfrak{c}_\mathfrak{m}}$ und die uneigentliche Ebene.

37. In jeder Ebene π senkrecht zur Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 liegt eine der ∞^1 uneigentlichen charakteristischen Hauptachsen des als scheitelrechtes Hyperboloid (vgl. **24**) anzusehenden einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Rotationsparaboloides P^2_α. Die Ebene π ist zugleich die Direktrixebene eines der übrigen ∞^2 einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide (vgl. **21**). Folglich liegt in π außerdem die charakteristische Hauptachse $\mathfrak{k}_n$ eines einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloides S_n^2. Jene uneigentliche charakteristische Hauptachse und diese eigentliche sind die einzigen mit π inzidenten charak-

[21]) A. a. O. [1]), Nr. 28.

teristischen Hauptachsen einscharig in C_1^1 enthaltener scheitelrechten Hyperboloide. Dreht sich die Ebene π um einen ihrer eigentlichen zur Fluchtebene γ von Σ_{ig} senkrechten Strahlen p_n, so beschreibt (vgl. **35**) die charakteristische Hauptachse $\mathfrak{k}_n$ die Regelschar $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$ einer kubischen Regelfläche $R_n^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$ mit der Doppelpunktsgerade p_n. Jeder vom uneigentlichen Punkte C'_∞ der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 verschiedene Raumpunkt X ist mit je einer zur Fluchtebene γ senkrechten Gerade p_n inzident. Ferner schneiden einander in jedem Punkte der Doppelpunktsgerade einer kubischen Regelfläche entweder ein Paar ihrer reellen getrennten oder vereinigten Regelstrahlen oder auch ein Paar ihrer konjugiert imaginären. Hieraus schließen wir:

Durch jeden Raumpunkt geht ein Paar getrennter oder vereinigter reellen oder ein Paar konjugiert imaginärer charakteristischen Hauptachsen der ∞^2 einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide. Eine Ausnahme bildet der uneigentliche Punkt C'_∞ der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1. Er ist mit ∞^1 charakteristischen Hauptachsen inzident; sie bilden den von C'_∞ ausgehenden uneigentlichen Strahlenbüschel erster Ordnung.

38. Gegeben sei mit dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 das ihm orthogonal verknüpfte Zylindroid C^3. Es sei die Regelschar $\mathfrak{C}^3$ dieses Zylindroides aus einem eigentlichen einfachen auf ihm gelegenen Punkte E durch den Ebenenkegel zweiter Ordnung $E^2(\varepsilon \ldots)$ projiziert. Der Ebenenkegel $E^2(\varepsilon \ldots)$ ist einem dem Fokalparaboloid C^2 umbeschriebenen parabolischen Ebenenzylinder $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$ orthogonal verknüpft (vgl. **32**), und $\mathsf{M}^2(\mu \ldots)$ wiederum projektiv (vgl. **31**) zur Büschelschar $(P^2 \ldots)$ der zu den Ebenen μ gehörigen Scheitelstrahlenparaboloide P^2. Die Büschelschar $(P^2 \ldots)$ endlich ist projektiv (vgl. **33**) zum Ebenenbüschel erster Ordnung $p_n(\pi \ldots)$ aus den Direktrixebenen π der Büschelscharparaboloide P^2. Aus den Projektivitäten:

$$E^2(\varepsilon \ldots) \,\overline{\wedge}\, \mathsf{M}^2(\mu \ldots) \,\overline{\wedge}\, (P^2 \ldots) \,\overline{\wedge}\, p_n(\pi \ldots)$$

folgt als Erzeugnis der projektiven Gebilde $E^2(\varepsilon \ldots)$, $p_n(\pi \ldots)$ die zu beiden perspektive (vgl. **35**) kubische Regelschar $\mathfrak{R}_n^2(\mathfrak{k}_n \ldots)$. Danach haben wir den Lehrsatz:

Jeder Ebenenkegel zweiter Ordnung $E^2(\varepsilon \ldots)$, der aus einem einfachen eigentlichen Punkte E des dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 die Regelschar $\mathfrak{C}^3$ von C^3 projiziert, ist perspektiv zu einer kubischen Regelschar $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$ in der Kongruenz der charakteristischen Hauptachsen aller einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide. Die Regelschar $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$ hat einen zur Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 senkrechten eigentlichen Strahl p_n zur Doppelpunktsgerade (vgl. **35**).

Es durchlaufe jetzt unser Punkt E den mit ihm inzidenten Regelstrahl $\mathfrak{c}_m$ von C^3, bis er sich mit dem auf $\mathfrak{c}_m$ gelegenen Doppelpunkte E_D des Zylindroides vereinigt. Der aus E_D die Regelschar $\mathfrak{C}^3$ projizierende Ebenenkegel $E_D^2(\varepsilon \ldots)$ ist in zwei Ebenenbüschel erster Ordnung zerfallen. Der eine hat den $\mathfrak{c}_m$ in E_D schneidenden Regelstrahl $\mathfrak{c}_m$ von C^3 zur Achse, der andere die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1. Die zu dem zerfallenen Ebenenkegel $E_D^2(\varepsilon \ldots)$ perspektive kubische Regelschar $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$ ist die Regelschar des früher (vgl. **35**) gefundenen Zylindroides $C^3_{\frac{\pi}{2}}$ als Ort der eigentlichen Hauptachsen aller einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide P^2. Den zur Büschelschar

dieser Paraboloide ($P_2 \ldots$) projektiven Ebenenbüschel erster Ordnung $p_n(\pi \ldots)$ ihrer Direktrixebenen π bilden die mit den Ebenen π identischen, durch (vgl. **33**) die Hauptsymmetrieachse c_d gehenden Scheitelebenen der Paraboloide.

39. Die reellen uneigentlichen einfachen Punkte des dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 liegen auf der mit dem uneigentlichen Kongruenzstrahle c_∞ vereinigten einfachen Leitgerade von C^3. Es sei E_∞ ein solcher uneigentlicher Punkt, $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ der mit ihm inzidente Regelstrahl des Zylindroides. Der aus E_∞ die Regelschar von C^3 projizierende Ebenenkegel zweiter Ordnung $E_\infty^2(\varepsilon \ldots)$ ist zerspalten in die zwei Ebenenbüschel erster Ordnung mit den Achsen c_∞ und $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$. Er liegt perspektiv zu einer in einen uneigentlichen Strahlenbüschel erster Ordnung und eine gleichseitig paraboloidische Regelschar $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_\mathfrak{m}}$ zerspaltenen kubischen Regelschar $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$ aus den charakteristischen Hauptachsen von ∞^1 einscharig C^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloiden (vgl. **36**). Und zwar besteht der Strahlenbüschel aus den vom uneigentlichen Punkte C'_∞ der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 ausgehenden uneigentlichen Strahlen, und die gleichseitig paraboloidische Regelschar $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_\mathfrak{m}}$ aus den auf unserm Regelstrahle $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ senkrechten charakteristischen Hauptachsen. Die Doppelpunktsgerade des $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_\mathfrak{m}}$ tragenden gleichseitigen Paraboloides $P^2_{\mathfrak{c}_\mathfrak{m}}$ ist der mit C'_∞ inzidente uneigentliche Leitstrahl von $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_\mathfrak{m}}$. Wir folgern hieraus den für die charakteristischen Hauptachsen aller einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide grundlegenden, die bisherigen Ergebnisse umfassenden Satz:

In der Kongruenz der charakteristischen Hauptachsen aller einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide liegen ∞^2 diese Hauptachsen erschöpfende kubische Regelscharen $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$; ihre Trägerflächen R_n^3 haben je die zur Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 senkrechten Geraden p_n zu Doppelpunktsgeraden. Unter den kubischen Regelscharen $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$ sind ∞^1 in denselben Strahlenbüschel erster Ordnung C'_∞ und je eine gleichseitig paraboloidische Regelschar $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_\mathfrak{m}}$ zerfallen. Den Strahlenbüschel C'_∞ bilden die mit dem uneigentlichen Punkte C'_∞ der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 inzidenten uneigentlichen Strahlen, die je zugehörige gleichseitig paraboloidische Regelschar $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_\mathfrak{m}}$ diejenigen charakteristischen Hauptachsen, die je auf den Regelstrahlen $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ des mit dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 von C_1^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 senkrecht stehen.

40. Von einem eigentlichen einfachen Punkte E des dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 strahle aus der zur Regelschar $\mathfrak{C}^3$ von C^3 perspektive Ebenenkegel zweiter Ordnung $E^2(\varepsilon \ldots)$. In ihm liegt die mit E inzidente zweifache Tangentenebene ε' von C^3. Der Ebenenkegel $E^2(\varepsilon \ldots)$ ist perspektiv (vgl. **38**) zu einer kubischen Regelschar $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$ aus charakteristischen Hauptachsen $\mathfrak{k}_n$ einscharig in C_1^1 enthaltener scheitelrechter Hyperboloide. Zur Regelschar $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{k}_n \ldots)$ ist perspektiv ein Ebenenenbüschel erster Ordnung $p_n(\pi \ldots)$, dessen Achse p_n die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 rechtwinklig schneidet. In den projektiven Gebilden $E^2(\varepsilon \ldots)$, $p_n(\pi \ldots)$ entspricht (vgl. **33**) der zweifachen Tangentenebene ε' von C^2 die Verbindungsebene von p_n mit der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1. Die Schnittgerade beider homologen Ebenen

ist eine in $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{f}_n \ldots)$ gelegene eigentliche Hauptachse eines einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloides. Enthielte $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{f}_n \ldots)$ noch eine eigentliche Hauptachse eines solchen gleichseitigen Paraboloides, so wären alle Regelstrahlen $\mathfrak{f}_n$ eigentliche Hauptachsen in C_1^1 einscharig enthaltener gleichseitigen Paraboloide. $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{f}_n \ldots)$ wäre dann die Regelschar (vgl. **35**) des Zylindroides $C_{\frac{\pi}{2}}^3$ und p_n die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1. Das ist bei dem eigentlichen einfachen Punkte E ausgeschlossen. Bei einer zerfallenen kubischen Regelschar $\mathfrak{R}^3(\mathfrak{f}_n \ldots)$, die aus einer paraboloidischen Regelschar $\mathfrak{P}_{\mathfrak{c}_m}^2$ und dem uneigentlichen Strahlenbüschel erster Ordnung besteht, der vom uneigentlichen Punkte C'_∞ der Hauptsymmetrieachse c_d ausstrahlt, ist p_n ein Strahl (vgl. **39**) dieses Büschels. Der Büschel p_n paralleler Ebenen sendet eine Ebene durch c_d. Es liegt somit in der paraboloidischen Regelschar $\mathfrak{P}_{\mathfrak{c}_m}^2$, und damit auch in der sie enthaltenden zerfallenen kubischen Regelschar $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{f}_n \ldots)$, ebenfalls die eigentliche Hauptachse eines einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloides. Kurz:

Jede kubische Regelschar $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{f}_n \ldots)$ aus charakteristischen Hauptachsen einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener scheitelrechten Hyperboloide geht — auch wenn sie zerfallen ist — durch die eigentliche Hauptachse eines einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloides.

Eine Ausnahme bildet die mit der zylindroidischen Regelschar $\mathfrak{C}_{\frac{\pi}{2}}^3$ vereinigte kubische Regelschar $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{f}_n \ldots)$. Sie besteht aus den eigentlichen Hauptachsen aller einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide (vgl. **35**).

41. Wie in Nummer **40** sei E ein eigentlicher einfacher Punkt des dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3. Ebenso projiziere wieder aus E der Ebenenkegel zweiter Ordnung $E^2(\varepsilon \ldots)$ die Regelschar $\mathfrak{C}^3$ von C^3. Endlich sei auch hier zu $E^2(\varepsilon \ldots)$ perspektiv die kubische Regelschar $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{f}_n \ldots)$ der charakteristischen Hauptachsen von ∞^1 einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloiden (vgl. **40**), und zu $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{f}_n \ldots)$ perspektiv der Ebenenbüschel erster Ordnung $p_n(\pi \ldots)$, dessen Achse p_n die Doppelpunktsgerade der Trägerfläche R_n^3 von $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{f}_n \ldots)$ ist.

Bei den die kubische Regelschar $\mathfrak{R}^3(\mathfrak{f}_n \ldots)$ erzeugenden projektiven Gebilden $E^2(\varepsilon \ldots)$ und $p_n(\pi \ldots)$ stehen je zwei homologe Ebenen aufeinander senkrecht (vgl. **21**); also auch die beiden Ebenen ε_E, π_{nE}, die mit der durch E gehenden charakteristischen Hauptachse $\mathfrak{f}_{nE}$ inzident sind. Außerdem kreuzt die zur Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 senkrechte Achse p_n von $p_n(\pi \ldots)$ rechtwinklig den mit E inzidenten Regelstrahl $\mathfrak{c}_m$ von C^3. Folglich ist die Ebene ε_E des Ebenenkegels $E^2(\varepsilon \ldots)$ mit $\mathfrak{c}_m$ inzident. Von den beiden durch $\mathfrak{c}_m$ gehenden Ebenen von $E^2(\varepsilon \ldots)$ berührt die eine in E einmal das Zylindroid C^3, während die andere ε' es zweimal berührt. Welche von beiden ist ε_E?

Der mit der zweimal berührenden Ebene ε' inzidente Strahl der kubischen Regelschar $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{f}_n \ldots)$ ist die sowohl mit der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 wie auch mit der Ebene $p_n c_d$ inzidente eigentliche Hauptachse eines einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloides (vgl. **40**). Folglich ist ε_E die durch $\mathfrak{c}_m$ gehende, in E das Zylindroid C^3 berührende Ebene, und der mit E inzidente Regelstrahl $\varepsilon_E \pi_{nE} = \mathfrak{f}_{nE}$ von $\mathfrak{R}_n^3(\mathfrak{f}_n \ldots)$

die in E zum Regelstrahle $\mathfrak{c}_m$ von C^3 senkrechte Tangente dieses Zylindroides. Die $\mathfrak{c}_m$ rechtwinklig schneidenden charakteristischen Hauptachsen der einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide bilden aber (vgl. **30**) die gleichseitig paraboloidische Regelschar $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}$. Somit haben wir das weitere grundlegende Ergebnis für die Kongruenz der charakteristischen Hauptachsen aller einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide:

Ist C^3 das dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 orthogonal verknüpfte Zylindroid, so erschöpfen die in ihren Berührungspunkten auf den Regelstrahlen von C^3 senkrechten Tangenten dieser Fläche die Kongruenz der charakteristischen Hauptachsen aller einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide. Die gleichseitig paraboloidischen Regelscharen $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}$ aus den zu den Regelstrahlen $\mathfrak{c}_m$ des Zylindroides C^3 senkrechten charakteristischen Hauptachsen der einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide sind identisch mit den Regelscharen aus den je zu den Regelstrahlen $\mathfrak{c}_m$ senkrechten Tangenten von C^3.

Der Beweis vorstehenden Lehrsatzes geht aus von einem eigentlichen einfachen Punkte E eines Regelstrahles $\mathfrak{c}_m$ von C^3. Da aber in jedem eigentlichen einfachen Punkte E von $\mathfrak{c}_m$ die Regelschar $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}$ mit der Regelschar der zu $\mathfrak{c}_m$ senkrechten Tangenten von C^3 einen Strahl gemein hat, so sind beide Regelscharen identisch. Also haben sie auch die nämlichen Strahlen in dem auf $\mathfrak{c}_m$ gelegenen Doppelpunkte von C^3 und im uneigentlichen Punkte von $\mathfrak{c}_m$.

Zu den die Regelstrahlen von C^3 rechtwinklig schneidenden Tangenten zählen die beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1. Zum Berührungspunkte hat jede den ihnen gemeinsamen Schnittpunkt mit der Hauptsymmetrieachse c_d, d. h. den Mittelpunkt C der Kongruenz. Und jede ist die gemeinsame charakteristische Hauptachse (vgl. **22**) je einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener scheitelrechten Hyperboloide.

42. Die eigentliche Hauptachse c_d des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist als Hauptsymmetrieachse der Kongruenz, für C^2 die Polare des uneigentlichen Kongruenzstrahles c_∞. Ferner sind für C^2 je zwei Regelstrahlen $\mathfrak{c}_m$, $\mathfrak{c}_m^s$ des C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 reziprok polar, wenn sie sich in den Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ der Kongruenz ineinander spiegeln [22]); also die zwei getrennten Leitgeraden einer der ∞^1 hyperbolischen oder die zwei vereinigten einer der beiden parabolischen linearen Strahlenkongruenzen mit dem gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 sind. Die Leitgeradenpaare $\mathfrak{c}_m\,\mathfrak{c}_m^s$ der linearen Kongruenzen mit dem gemeinsamen gleichseitigen Fokalparaboloid C^2 schneiden hiernach den uneigentlichen Kongruenzstrahl c_∞ in den Punktepaaren $\mathfrak{C}_{m\infty}$ $\mathfrak{C}^s_{m\infty}$ der auf ihm durch C^2 hervorgerufenen hyperbolischen Involution konjugierten Punkte $c_\infty(\mathfrak{C}_{m\infty}\mathfrak{C}^s_{m\infty}, \ldots)$. Zu Doppelpunkten hat die Involution $c_\infty(\mathfrak{C}_{m\infty}\mathfrak{C}^s_{m\infty}, \ldots)$ die uneigentlichen Punkte $\mathfrak{C}_{1\infty}$, $\mathfrak{C}_{2\infty}$ der Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1.

Je zwei für C^2 reziprok polare Strahlen $\mathfrak{c}_m$, $\mathfrak{c}_m^s$, ... der Regelschar $\mathfrak{C}^3$ von C^3 bilden die Strahlenpaare $\mathfrak{c}_m\mathfrak{c}_m^s$, ... einer von $\mathfrak{C}^3$ getragenen Strahleninvolution $\mathfrak{C}^3(\mathfrak{c}_m\mathfrak{c}_m^s, \ldots)$. Zu ihr ist die sie aus der Hauptsymmetrieachse c_d projizierende Involution konjugierter

[22]) A. a. O. [5]), Nr. 39.

Durchmesserebenen $c_d(\gamma_m \gamma_m^s, \dots)$ von C^2 perspektiv. Die in c_d auf den konjugierten Durchmesserebenen $\gamma_m, \gamma_m^s; \dots$ bzw. senkrechten Ebenen $\pi_n, \pi_n^s; \dots$ bilden die Paare der Ebeneninvolution $c_d(\pi_n \pi_n^s, \dots)$. Zu der Ebeneninvolution $c_d(\gamma_m \gamma_m^s, \dots)$ ist die aus dem uneigentlichen Punkte C'_∞ von c_d ausstrahlende Involution konjugierter uneigentlichen Tangenten $\mathfrak{c}_{m\infty}, \mathfrak{c}_{m\infty}^s; \dots$ von C^2, d. h. $C'_\infty(\mathfrak{c}_{m\infty} \mathfrak{c}_{m\infty}^s, \dots)$ perspektiv, und zu der Ebeneninvolution $c_d(\pi_n \pi_n^s, \dots)$ die Involution uneigentlicher Strahlen $C'_\infty(p_{n\infty} p_{n\infty}^s, \dots)$, bei der die Strahlen $p_{n\infty}, p_{n\infty}^s; \dots$ ihrer Paare bzw. die Strahlen der Regelstrahlenpaare $\mathfrak{c}_m \mathfrak{c}_m^s, \dots$ rechtwinklig kreuzen. Die Doppelstrahlen der Involution $C'_\infty(\mathfrak{c}_{m\infty} \mathfrak{c}_{m\infty}^s, \dots)$ sind aber ein Strahlenpaar der Involution $C'_\infty(p_{n\infty} p_{n\infty}^s, \dots)$; somit vertauscht die Korrelation des polaren Raumes von C^2 nicht nur die Strahlen jedes Paares $\mathfrak{c}_m \mathfrak{c}_m^s, \dots$ der involutorischen zylindroidischen Regelschar $\mathfrak{C}^3(\mathfrak{c}_m \mathfrak{c}_m^s, \dots)$ miteinander, sondern auch die je die Strahlen $\mathfrak{c}_m, \mathfrak{c}_m^s; \dots$ rechtwinklig kreuzenden uneigentlichen Strahlen $p_{n\infty}, p_{n\infty}^s; \dots$.

Auf dem Regelstrahle $\mathfrak{c}_m$ von C^3 senkrecht (vgl. **30**) stehen die charakteristischen Hauptachsen $\mathfrak{f}_{\mathfrak{c}_m}, \dots$ von ∞^1 einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloiden $S^2_{\mathfrak{c}_m}, \dots$. Die von den Hauptachsen $\mathfrak{f}_{\mathfrak{c}_m}, \dots$ erfüllte gleichseitig paraboloidische Regelschar $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}(\mathfrak{f}_{\mathfrak{c}_m} \dots)$ hat eine durch $\mathfrak{c}_m$ und den $\mathfrak{c}_m$ rechtwinklig kreuzenden Strahl $p_{n\infty}$ gehende Leitschar. Gleiches gilt von der gleichseitig paraboloidischen Regelschar $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m^s}(\mathfrak{f}_{\mathfrak{c}_m^s} \dots)$ der $\mathfrak{c}_m^s$ rechtwinklig schneidenden charakterischen Hauptachsen $\mathfrak{f}_{\mathfrak{c}_m^s}, \dots$. Wie soeben bewiesen, vertauscht die Korrelation des polaren Raumes von C^2 nicht nur die Regelstrahlen $\mathfrak{c}_m, \mathfrak{c}_m^s$ von C^3 miteinander, sondern auch die $\mathfrak{c}_m, \mathfrak{c}_m^s$ bzw. rechtwinklig kreuzenden uneigentlichen Strahlen $p_{n\infty}, p_{n\infty}^s$. Folglich verwandelt sie die gleichseitig paraboloidische Regelschar $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}(\mathfrak{f}_{\mathfrak{c}_m} \dots)$ wiederum in eine gleichseitig paraboloidische Regelschar $\mathfrak{P}^2_{0\mathfrak{c}_m^s}(\mathfrak{f}_{0\mathfrak{c}_m^s} \dots)$ mit einer durch $\mathfrak{c}_m^s, p_{n\infty}^s$ gehenden Leitschar. Die Strahlen $\mathfrak{f}_{\mathfrak{c}_m}, \dots$ von $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}(\mathfrak{f}_{\mathfrak{c}_m} \dots)$ sind als charakteristische Hauptachsen der scheitelrechten Hyperboloide $S^2_{\mathfrak{c}_m}, \dots$ den Regelstrahl $\mathfrak{c}_m$ von C^3 in ihren Berührungspunkten rechtwinklig schneidende Tangenten des Zylindroids (vgl. **41**). Ferner wird jede Tangente des für die Korrelation des polaren Raumes von C^2 invarianten Zylindroides C^3 durch diese Korrelation wiederum in eine Tangente von C^3 verwandelt. Somit sind die Strahlen $\mathfrak{f}_{0\mathfrak{c}_m^s}, \dots$ ebenfalls in ihren Berührungspunkten auf $\mathfrak{c}_m^s$ senkrechte Tangenten von C^3. Die Regelschar $\mathfrak{P}^2_{0\mathfrak{c}_m^s}$ $(\mathfrak{f}_{0\mathfrak{c}_m^s} \dots)$ erweist sich demnach als die gleichseitig paraboloidische Regelschar $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m^s}$ $(\mathfrak{f}_{\mathfrak{c}_m^s} \dots)$ aus den $\mathfrak{c}_m^s$ rechtwinklig schneidenden charakteristischen Hauptachsen einscharig in C_1^1 enthaltener scheitelrechten Hyperboloide. Vereinigt sich das Strahlenpaar $\mathfrak{c}_m \mathfrak{c}_m^s$ von C^3 nacheinander mit allen übrigen Strahlenpaaren der involutorischen Regelschar $\mathfrak{C}^3(\mathfrak{c}_m \mathfrak{c}_m^s, \dots)$, so folgt für die Paare zugehöriger gleichseitig paraboloidischen Regelscharen $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}(\mathfrak{f}_{\mathfrak{c}_m} \dots)$ $\mathfrak{P}_{\mathfrak{c}_m^s}(\mathfrak{f}_{\mathfrak{c}_m^s} \dots)$:

Gegeben sei das gleichseitige Fokalparaboloid C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 und auf dem ihm orthogonal verknüpften Zylindroid C^3 die involutorische Regelschar $\mathfrak{C}^3(\mathfrak{c}_m \mathfrak{c}_m^s, \dots)$ der für C^2 reziprok polaren Regelstrahlen $\mathfrak{c}_m, \mathfrak{c}_m^s; \dots$ Dann verwandelt die Korrelation des polaren Raumes von C^2 je zwei der gleichseitig paraboloidischen Regelscharen $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}, \mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m^s}; \dots$ ineinander, die bzw. aus den $\mathfrak{c}_m, \mathfrak{c}_m^s; \dots$ rechtwinklig schneidenden

charakteristischen Hauptachsen ∞^1 einscharig in C_1^1 enthaltener scheitelrechten Hyperboloide bestehen.

Die ∞^1 Paare gleichseitig paraboloidischer Regelscharen $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}$ $\mathfrak{P}^2_{\mathfrak{c}_m}$, ... erschöpfen zusammen [16]) mit den beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1, die Kongruenz der charakteristischen Hauptachsen aller einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide. Demnach folgt weiter:

Für das gleichseitige Fokalparaboloid C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 sind die charakteristischen Hauptachsen der ∞^2 einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide paarweise reziprok polar.

43. Durch einen gegebenen Raumpunkt geht (vgl. **37**) ein Paar reeller getrennten oder vereinigten oder ein Paar konjugiert imaginärer Strahlen aus der Kongruenz der charakteristischen Hauptachsen aller einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide. Nach dem zweiten Lehrsatze von Nummer **42** besteht die Kongruenz dieser charakteristischen Hauptachsen aus Paaren reziproker Polaren für das gleichseitige Fokalparaboloid C^2 von C_1^1. Also schließen wir:

Die Kongruenz der charakteristischen Hauptachsen aller einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide ist zweiter Ordnung und zweiter Klasse.

Aus den Ergebnissen der Nummern **35—42** wird sich Lehre und Aufbau dieser besonderen quadratischen Strahlenkongruenz entwickeln. Sie verhält sich zur allgemeinen quadratischen Strahlenkongruenz ähnlich wie die parabolische lineare Strahlenkongruenz zur allgemeinen linearen.

Berlin-Halensee, den 10. März 1937.

Eingegangen 22. April 1937.

Der Normenbegriff für die Ideale eines Ringes beliebiger Struktur.

Von *Hans Fitting* in Königsberg (Pr.).

Einleitung.

In einer früheren Abhandlung [1]) hat der Verfasser folgende Sätze bewiesen:

I. *$\mathfrak{M}$ sei ein Rechtsmodul in bezug auf einen kommutativen Ring $\mathfrak{o}$ mit Einselement, das für $\mathfrak{M}$ ein Einheitsoperator sei. Ferner werde in $\mathfrak{M}$ die Existenz eines aus endlich vielen Elementen bestehenden Erzeugendensystems $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ vorausgesetzt. Unter diesen Bedingungen ist das Ideal des Ringes $\mathfrak{o}$, das von den Determinanten aller der Bedingung*

$$\sum_{\mu=1}^{s} \alpha_\mu a_{\mu\nu} = 0, \quad a_{\mu\nu} \in \mathfrak{o} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s)$$

genügenden, s-reihigen, quadratischen Matrizen $(a_{\mu\nu})$ erzeugt wird, von der speziellen Wahl des Basissystems $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ unabhängig, d. h. in $\mathfrak{M}$ invariant definiert [2]) (DM, § 1); es werde im folgenden mit $\mathfrak{d}(\mathfrak{M})$ bezeichnet und — im Anschluß an Iyanaga [2a]) — das *Ordnungsideal* von $\mathfrak{M}$ genannt.

II. *Zum annullierenden Ideal* [3]) $\mathfrak{a}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{a}$ *des Moduls $\mathfrak{M}$ steht $\mathfrak{d}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{d}$ in der Beziehung $\mathfrak{a}^r \subseteqq \mathfrak{d} \subseteqq \mathfrak{a}$* [4]), *falls nur r hinreichend groß* (z. B. nicht kleiner als der Rang r [5]) von $\mathfrak{M}$) *gewählt wird; $\mathfrak{d}(\mathfrak{M})$ und $\mathfrak{a}(\mathfrak{M})$ sind also immer durch dieselben Primideale teilbar* (DM, § 2, Satz 3).

III. *Das Ordnungsideal $\mathfrak{d}(\mathfrak{M})$ ist durch das Indexideal $\mathfrak{d}(\mathfrak{M}/\mathfrak{U})$, i. a. aber nicht durch das Ordnungsideal $\mathfrak{d}(\mathfrak{M})$ eines Untermoduls $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{M}$ teilbar:*

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{M}) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{d}(\mathfrak{M}/\mathfrak{U})), \ \textit{i. a. aber} \ \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{d}(\mathfrak{U})) \qquad \text{(DM, § 2, Satz 7, 8).}$$

IV. *Bei jeder direkten Summenzerlegung von $\mathfrak{M}$*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \cdots + \mathfrak{K}_n$$

ist das Ordnungsideal von $\mathfrak{M}$ gleich dem Produkt aus den Ordnungsidealen der Summanden $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$:

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{d}(\mathfrak{K}_1) \cdot \mathfrak{d}(\mathfrak{K}_2) \cdots \mathfrak{d}(\mathfrak{K}_n) \qquad \text{(DM, § 2, Satz 5).}$$

---

[1]) H. Fitting, Die Determinantenideale eines Moduls, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **46** (1936), S. 195—228; diese Arbeit wird mit DM zitiert.

[2]) Ein Beweis des Satzes I findet sich auch schon in der Arbeit von Iyanaga, Zum Beweis des Hauptidealsatzes, Abhandlungen des Hamburger Math. Sem. **10** (1934), S. 355—356.

[2a]) A. a. O. [2]), S. 355.

[3]) Unter dem *annullierenden Ideal* eines Moduls $\mathfrak{M}$ mit dem Operatorenring $\mathfrak{o}$ wird die Gesamtheit aller Elemente a aus $\mathfrak{o}$ verstanden, welche für jedes $\alpha \in \mathfrak{M}$ der Bedingung $\alpha \cdot a = 0$ genügen.

[4]) Die Relation $\mathfrak{d} \subseteqq \mathfrak{a}$ bringt eine Verallgemeinerung des kleinen Fermatschen Satzes zum Ausdruck, die ebenfalls bereits von Iyanaga, a. a. O. [2]), S. 356, bewiesen wurde.

[5]) *Rang* von $\mathfrak{M}$ ist die kleinste natürliche Zahl, welche angibt, daß in $\mathfrak{M}$ ein aus r, aber kein aus $r - 1$ Elementen bestehendes Erzeugendensystem existiert.

V. *Ist* $\mathfrak{o}$ *speziell ein* 5*-Axiomering im Sinne E. Noethers* (*vom Typus der Hauptordnung eines algebraischen Zahlkörpers endlichen Grades*), *so ist das Ordnungsideal* $\mathfrak{d}(\mathfrak{M})$ *immer gleich dem Produkt aus Index- und Ordnungsideal eines Untermoduls* $\mathfrak{U}$ *von* $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{d}(\mathfrak{M}/\mathfrak{U}) \cdot \mathfrak{d}(\mathfrak{U}) \qquad \text{(DM, § 4, Satz 18).}$$

VI. *Im Spezialfall einer* (*additiv geschriebenen*) *gewöhnlichen, endlichen, abelschen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist* $\mathfrak{d}(\mathfrak{G})$ — falls $\mathfrak{G}$ als Rechtsmodul in bezug auf den Ring der ganzrationalen Zahlen aufgefaßt wird — *das von der Ordnung von* $\mathfrak{G}$ *erzeugte Hauptideal* (DM, § 2, Satz 6, S. 204, vgl. auch Iyanaga a. a. O. [2]), S. 356).

Der letzte Satz führt zu einer interessanten Konsequenz: Ist $\mathfrak{O}$ die Hauptordnung eines algebraischen Zahlkörpers endlichen Grades, $\mathfrak{o}$ der Ring der ganzrationalen Zahlen und $\mathfrak{A}$ irgendein Ideal von $\mathfrak{O}$, so ist $\mathfrak{d}(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ — wenn das Restklassensystem $\mathfrak{O}/\mathfrak{A}$ als Rechtsmodul in bezug auf $\mathfrak{o}$ gedeutet wird — nichts anderes als die Norm von $\mathfrak{A}$ in bezug auf $\mathfrak{o}$ (absolute Norm). Diesem Beispiel entsprechend mache ich in dieser Arbeit die Resultate I—VI über das Ordnungsideal $\mathfrak{d}(\mathfrak{M})$ in naheliegender Weise zur Grundlage einer allgemeinen Theorie für die „Normen" der (ein- und zweiseitigen) Ideale eines beliebigen kommutativen oder nichtkommutativen Ringes $\mathfrak{O}$ mit Einselement. Von dem Ring $\mathfrak{o}$, in bezug auf den die Normen gebildet werden sollen, setze ich dabei voraus, daß er das Einselement von $\mathfrak{O}$ umfaßt und im Zentrum von $\mathfrak{O}$ enthalten ist [6]); jedes Rechts- oder Linksideal $\mathfrak{A}$ des Ringes $\mathfrak{O}$ ist dann immer *Rechts*modul in bezug auf $\mathfrak{o}$, den ich mit $\mathfrak{A}_\mathfrak{o}$ bezeichne. Für das Ideal $\mathfrak{A}$ des Ringes $\mathfrak{O}$ definiere ich die Norm $N\mathfrak{A}$ bezüglich $\mathfrak{o}$ dann und nur dann, wenn im $\mathfrak{o}$-Rechtsmodul $\mathfrak{O}_\mathfrak{o}/\mathfrak{A}_\mathfrak{o}$ der Doppelkettensatz gilt [7]); in diesem Fall sei $N\mathfrak{A}$ das Ordnungsideal:

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{O}_\mathfrak{o}/\mathfrak{A}_\mathfrak{o}) = N\mathfrak{A},$$

dessen Existenz gesichert ist, da Moduln mit Doppelkettensatz sich immer von endlich vielen Elementen erzeugen lassen. Aufgabe der vorliegenden Abhandlung soll es sein, die Theorie, die sich auf dem eben definierten, allgemeinen Normenbegriff aufbaut, im einzelnen zu entwickeln und neben der Herleitung neuer Resultate die Verbindung mit den wichtigsten, in der Literatur vorkommenden Normensätzen und -definitionen herzustellen.

Von Bedeutung ist der Normenbegriff namentlich in der hyperkomplexen Arithmetik, deren Betrachtungen sich hauptsächlich auf die Ordnungen einer einfachen Algebra A beziehen, deren Grundkörper P der Quotientenkörper eines Noetherschen 5-Axiomeringes $\mathfrak{r}$ ist. Bedeutet $\mathfrak{O}$ irgendeine (nicht notwendig maximale) Ordnung von A und $\mathfrak{o}$ einen $\mathfrak{r}$ umfassenden Teilring des Zentrums von $\mathfrak{O}$, so ist die Norm für alle *nicht singulären*, d. h. für alle diejenigen Ideale definiert, die wenigstens einen Nichtnullteiler enthalten; die Normenbildung ist also gerade bei allen Idealen möglich, die in der hyperkomplexen Arithmetik eine Rolle spielen, in der man ja die (aus lauter Nullteilern bestehenden) singulären Ideale (z. B. das Nullideal) auszuschließen pflegt.

Den interessantesten Spezialfall erhält man natürlich, wenn man $\mathfrak{O}$ als Maximalordnung von A, $\mathfrak{o}$ als Hauptordnung eines P umfassenden Teilkörpers K des Zentrums Z von A voraussetzt:

$$\mathsf{P} \subseteqq \mathsf{K} \subseteqq \mathsf{Z} \subseteqq A,$$

---

[6]) An sich würde es genügen, $\mathfrak{o}$ als einen das Einselement von $\mathfrak{O}$ umfassenden, kommutativen Teilring von $\mathfrak{O}$ vorauszusetzen; da aber unter dieser allgemeinen Voraussetzung die Theorie etwas schwerfällig wird, beschränke ich mich auf den im Text angegebenen Spezialfall.

[7]) Auch an dieser Stelle wäre es wieder möglich, die scharfe Voraussetzung des Doppelkettensatzes durch eine schwächere Forderung, etwa Existenz einer aus endlich vielen Elementen bestehenden Basis im Modul $\mathfrak{O}_\mathfrak{o}/\mathfrak{A}_\mathfrak{o}$ zu ersetzen. Von dieser Verallgemeinerung gilt aber dieselbe Bemerkung wie die in Fußnote 6 gemachte, weshalb ich auf eine Weiterverfolgung des allgemeinen Falles von vornherein verzichte.

wobei man, um über die Existenz maximaler Ordnungen in A bzw. K Gewißheit zu haben, sich auf solche einfachen Algebren A über P beschränken wird, bei denen das Zentrum Z über P separabel, d. h. von erster Art ist. In diesem Falle werde ich neben $\mathfrak{O}$ gleichzeitig alle Maximalordnungen $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{O}'$, $\mathfrak{O}''$, ... von A betrachten. Mein erstes Ziel ist ein Beweis des bekannten Normenproduktsatzes (die Norm eines eigentlichen Idealproduktes ist das Produkt aus den Normen der einzelnen Faktoren), der sich unter Umgehung der Schwierigkeiten, die bei der üblichen Begründungsweise auftreten, wenn $\mathfrak{o}$ kein Hauptidealring ist, und unter Vermeidung des Umwegs über die $\mathfrak{p}$-adik direkt aus gruppentheoretischen Struktursätzen ableiten läßt, die für die Restklassenmoduln gewisser Ideale der Maximalordnungen von A gelten [8]). Anschließend beweise ich den Satz, daß zwei Ideale $\mathfrak{A}_{ij}$ und $\mathfrak{B}_{kl}$ stets dann und nur dann als $\mathfrak{o}$-Moduln isomorph sind, falls ihre Normen bezüglich $\mathfrak{o}$ im gewöhnlichen Sinne der algebraischen Zahlentheorie äquivalent sind, woraus u. a. folgt, daß z. B. alle Maximalordnungen von A als $\mathfrak{o}$-Moduln, insbesondere auch als $\mathfrak{z}$-Moduln isomorph sind, wobei $\mathfrak{z}$ die Hauptordnung des Zentrums Z von A bedeutet. Das letzte Resultat ist insofern interessant, als es — wie ich zum Schluß noch zeigen werde — in A die Einführung eines neuen Idealklassenbegriffs ermöglicht, derart, daß die Idealklassen einerseits als natürliche Verallgemeinerung der in der algebraischen Zahlentheorie definierten Idealklassen angesehen werden können, anderseits bei multiplikativer Verknüpfung eine gewöhnliche abelsche Gruppe bilden, die im Spezialfall rationaler Algebren sogar endlich ist.

§ 1. Normentheorie in Ringen allgemeiner Struktur.

$\mathfrak{O}$ sei ein beliebiger kommutativer oder nichtkommutativer Ring mit Einselement 1 und $\mathfrak{o}$ ein Teilring des Zentrums von $\mathfrak{O}$, der das Einselement von $\mathfrak{O}$ umfaßt. Die Elemente eines beliebigen Rechts- oder Linksideals $\mathfrak{A}$ des Ringes $\mathfrak{O}$ bilden dann offenbar stets einen *Rechts*modul in bezug auf $\mathfrak{o}$, den ich mit $\mathfrak{A}_\mathfrak{o}$ bezeichne. Für den Restklassenmodul $\mathfrak{O}_\mathfrak{o}/\mathfrak{A}_\mathfrak{o}$ schreibe ich kurz $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_\mathfrak{o}$.

Für ein Rechts- oder Linksideal $\mathfrak{A}$ des Ringes $\mathfrak{O}$ führe ich eine Norm bezüglich $\mathfrak{o}$, in Zeichen $N_{\mathfrak{O}/\mathfrak{o}}(\mathfrak{A}) = N\mathfrak{A}$ [9]) ein, wenn im Modul $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_\mathfrak{o}$ der Doppelkettensatz gilt; in diesem Fall sei $N\mathfrak{A}$ das Ordnungsideal des Moduls $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_\mathfrak{o}$, d. h.

$$N_{\mathfrak{O}/\mathfrak{o}}(\mathfrak{A}) = N\mathfrak{A} = \mathfrak{d}\{(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_\mathfrak{o}\},$$

während $N\mathfrak{A}$ in allen übrigen Fällen gar nicht definiert wird. Wenn daher im folgenden von der Norm eines Ideals $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{O}$ die Rede ist, so wird dabei immer stillschweigend vorausgesetzt, daß die genannte Endlichkeitsbedingung — Doppelkettensatz in $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_\mathfrak{o}$ — erfüllt ist, was ich nicht jedesmal ausdrücklich hervorheben will.

Satz 1. *Aus $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{B}$ folgt $N\mathfrak{A} \leqq N\mathfrak{B}$.*

Beweis. Es ist

$$(\mathfrak{O}_\mathfrak{o}/\mathfrak{A}_\mathfrak{o})/(\mathfrak{B}_\mathfrak{o}/\mathfrak{A}_\mathfrak{o}) \cong (\mathfrak{O}/\mathfrak{B})_\mathfrak{o}$$

und daher Satz 1 ein Spezialfall des Satzes III (Einleitung).

Satz 2. *Es gilt*

$$(\mathfrak{A} \frown \mathfrak{o})^r \leqq N\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{A} \frown \mathfrak{o},$$

wenn r hinreichend groß (z. B. nicht kleiner als die Rangzahl des Moduls $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_\mathfrak{o}$ (siehe Fußnote 5) *gewählt wird. $N\mathfrak{A}$ ist also durch dieselben Primideale teilbar wie das „Verengungsideal“* (der Durchschnitt) $\mathfrak{A} \frown \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$.

---

[8]) In dem Buche Deuring, Algebren (Ergebnisse d. Math. **4** (1935), S. 79ff.) wird ein ähnlicher Beweis gegeben, der aber auf einer anderen, mit der meinigen im betrachteten Spezialfall gleichwertigen, Normendefinition beruht.

[9]) Ich schreibe einfach $N\mathfrak{A}$, falls über die Bezugsringe $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{o}$ kein Zweifel besteht.

Beweis. Folgt aus Satz II (Einleitung); denn $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$ ist das annullierende Ideal des Moduls $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_\mathfrak{o}$.

Satz 3. *Die Norm eines Primideals* $\mathfrak{P}$ [10]) *ist*

$$N\mathfrak{P} = (\mathfrak{P} \cap \mathfrak{o})^f ,$$

wo f *den Grad von* $\mathfrak{P}$ *bezüglich* $\mathfrak{o}$, d. h. den Rang des Moduls $(\mathfrak{O}/\mathfrak{P})_\mathfrak{o}$, *bezeichnet.*

Beweis. Zunächst ist $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}$, was nach Einführung des Eigenrings [10]) $\mathfrak{O}^*$ von $\mathfrak{P}$ leicht bestätigt werden kann; denn ist ein Produkt von Idealen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ des Ringes $\mathfrak{o}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar, so gilt

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{O}^* \cdots \mathfrak{a}_k\mathfrak{O}^* \leqq (\mathfrak{P} \cap \mathfrak{o})\,\mathfrak{O}^* \leqq \mathfrak{P} ,$$

so daß wenigstens einer der Faktoren $\mathfrak{a}_1\mathfrak{O}^*, \ldots, \mathfrak{a}_k\mathfrak{O}^*$, etwa $\mathfrak{a}_\varkappa\mathfrak{O}^*$, durch $\mathfrak{P}$ und damit $\mathfrak{a}_\varkappa$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein muß.

Nun ist $\mathfrak{p}$ das annullierende Ideal des Moduls $(\mathfrak{O}/\mathfrak{P})_\mathfrak{o}$ und in $(\mathfrak{O}/\mathfrak{P})_\mathfrak{o}$, also auch mod $\mathfrak{p}$, der Doppelkettensatz erfüllt (vgl. DM, § 5, Absatz 2, S. 225). Infolgedessen ist $\mathfrak{p}$ sogar ein teilerloses Ideal und der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ein Körper.

Da $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{o}$ den Modul $(\mathfrak{O}/\mathfrak{P})_\mathfrak{o}$ annulliert, kann $(\mathfrak{O}/\mathfrak{P})_\mathfrak{o}$ auch als Modul in bezug auf den Restklassenkörper $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ aufgefaßt werden. Es zeigt sich dann, daß $(\mathfrak{O}/\mathfrak{P})_\mathfrak{o}$ in die direkte Summe von genau f einfachen Untermoduln zerfällt, die alle mit $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ isomorph sind. Wegen $\mathfrak{d}(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ folgt hieraus nach Satz IV (Einleitung)

$$N\mathfrak{P} = \mathfrak{d}\{(\mathfrak{O}/\mathfrak{P})_\mathfrak{o}\} = \mathfrak{p}^f .$$

Satz 4. *Bei einem Primärideal* $\mathfrak{Q}$ [10]) *sind Norm* $N\mathfrak{Q}$ *und Verengungsideal* $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{o}$ *primäre (sogar einartige) Ideale, die* — nach Satz 2 — *zum selben Primideal* $\mathfrak{p}$ *gehören; dieses* $\mathfrak{p}$ *ist das Verengungsideal des zu* $\mathfrak{Q}$ *gehörigen Primideals* [10]) $\mathfrak{P}^*$ *in* $\mathfrak{o}$, *d. h.* $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^* \cap \mathfrak{o}$.

Beweis. Ich setze $\mathfrak{Q}$ als Linksideal voraus, was natürlich keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Für zwei Elemente a und b aus $\mathfrak{o}$ sei $a \cdot b \equiv 0$, aber $a \not\equiv 0$ (mod $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{o}$). Dann ist, falls mit $\mathfrak{O}^*$ der Eigenring [10]) von $\mathfrak{Q}$ bezeichnet wird,

$$a\mathfrak{O}^* \cdot b\mathfrak{O}^* \leqq (\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{o})\,\mathfrak{O}^* \leqq \mathfrak{Q}, \qquad a\mathfrak{O}^* \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{Q}} .$$

Nun sollte $\mathfrak{Q}$ primär sein; mithin ist jedes Element aus $b\mathfrak{O}^*$ mod $\mathfrak{Q}$ und daher b mod $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{o}$ nilpotent. Wir finden also: 1) Aus $a \in \mathfrak{o}$, $b \in \mathfrak{o}$ und $a \cdot b \equiv 0$, $a \not\equiv 0$ (mod $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{o}$) folgt $b^\varrho \equiv 0$ (mod $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{o}$) für hinreichend großes ϱ. 2) Jedes Element p^* aus $\mathfrak{P}^* \cap \mathfrak{o}$ ist mod $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{o}$ nilpotent. 3) $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{o}$ ist durch $\mathfrak{P}^* \cap \mathfrak{o}$ teilbar. Durch 1), 2) und 3) wird $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{o}$ bekanntlich als primäres Ideal und $\mathfrak{P}^* \cap \mathfrak{o}$ als das zu $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{o}$ gehörige Primideal charakterisiert. Darüber hinaus ist aber $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{o}$ sogar ein einartiges Ideal, da $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{o}$ das annullierende Ideal von $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q})_\mathfrak{o}$ ist und in $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q})_\mathfrak{o}$, also auch mod $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{o}$ der Doppelkettensatz gilt (vgl. DM, § 5, Absatz 2, S. 225). Nach Satz 2 muß daher mit $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{o}$ auch $N\mathfrak{Q}$ ein zum Primideal $\mathfrak{P}^* \cap \mathfrak{o}$ gehöriges (einartiges) Primärideal sein.

Satz 5. *Ist ein Ideal* $\mathfrak{A}$ *des Ringes* $\mathfrak{O}$ *direkter Durchschnitt* [10a]) *der Ideale* $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_k$ *von* $\mathfrak{O}$, *so gilt*:

$$N\mathfrak{A} = N\mathfrak{B}_1 \cdots N\mathfrak{B}_k .$$

Beweis. Man setze $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{B}_{i-1} \cap \mathfrak{B}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{B}_k$. Nach bekannten Sätzen zerfällt dann $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_\mathfrak{o}$ in die direkte Summe der k Moduln $(\mathfrak{C}_i)_\mathfrak{o}/(\mathfrak{A})_\mathfrak{o}$ $(i = 1, \ldots k)$; außerdem ist

$$(\mathfrak{C}_i)_\mathfrak{o}/\mathfrak{A}_\mathfrak{o} \cong (\mathfrak{O}/\mathfrak{B}_i)_\mathfrak{o} .$$

---

[10]) Definition siehe: H. Fitting, Primärkomponentenzerlegung in nichtkommutativen Ringen, Math. Ann. **111** (1935), S. 19—41, insbesondere 21—23.

[10a]) Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Ideale $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_k$ heißt *direkter Durchschnitt*, wenn jedes $\mathfrak{B}_i$ zum kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der übrigen teilerfremd ist.

Hieraus folgt die Behauptung nach Satz IV (Einleitung).

Ein Ideal $\mathfrak{A}$ *von* $\mathfrak{O}$, *für das eine Norm bezüglich* $\mathfrak{o}$ *definiert ist, läßt sich immer* (meist sogar auf mannigfache Art) *als direkter Durchschnitt primärer Ideale darstellen*, weil ja in $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_\mathfrak{o}$, um so mehr für die Oberideale von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{O}$, der Doppelkettensatz gilt (vgl. a. a. O. [10]), Satz 5a). Nach Satz 5 ergibt sich hieraus

Satz 6. *Bei jeder Darstellung des Ideals* $\mathfrak{A}$ *als direkter Durchschnitt von Primäridealen* $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_k$ *wird*

$$N\mathfrak{A} = N\mathfrak{Q}_1 \cdots N\mathfrak{Q}_k.$$

$N\mathfrak{A}$ ist also stets als Produkt der Normen primärer Ideale darstellbar. Ist $\mathfrak{O}$ kommutativ, so ist insbesondere $N\mathfrak{A} = N\mathfrak{Q}_1 \cdots N\mathfrak{Q}_k$, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{Q}_1 \cdots \mathfrak{Q}_k$ die eindeutig bestimmte Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in das Produkt paarweise teilerfremder Primärideale bedeutet [11]).

Zur Vorbereitung des Satzes 7 schalte ich eine Zwischenbetrachtung ein:

Bedeutet M irgendeine r-reihige und s-spaltige Matrix, deren Koeffizienten dem Ring $\mathfrak{o}$ entnommen sind, so ist die Menge aller Matrizenprodukte

$$\overset{s}{\boxed{M}} \cdot \overset{r}{\boxed{X}} = \overset{r}{\boxed{Z}},$$

in denen der rechte Faktor X sämtliche s-reihigen und r-spaltigen Matrizen durchläuft, die sich aus den Elementen von $\mathfrak{o}$ bilden lassen, ein Rechtsideal $\mathfrak{o}_r$ aller r-reihigen, quadratischen Matrizen mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$; ich nenne es *das von M erzeugte Rechtsideal.*

Im allgemeinen ist natürlich nicht jedes Rechtsideal $|\mathfrak{a}_r)$ *von* $\mathfrak{o}_r$ *im eben beschriebenen Sinne von einer Matrix erzeugbar; dies ist aber jedenfalls dann immer der Fall, wenn in* $\mathfrak{o}$ *die Teilerketten-(Maximal-)Bedingung erfüllt ist.* Um dies zu beweisen, werde mit $|\mathfrak{a}_r)'$ die Menge aller r-zeiligen, *ein*spaltigen Matrizen bezeichnet, die in den zu $|\mathfrak{a}_r)$ gehörigen Matrizen als Spalten vorkommen, und mit $\mathfrak{o}_r'$ die Menge aller r-zeiligen, *ein*spaltigen Matrizen, die sich überhaupt mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$ bilden lassen. $|\mathfrak{a}_r)'$ und $\mathfrak{o}_r'$ sind offenbar Rechtsmoduln in bezug auf $\mathfrak{o}$, von denen der letztere sogar eine aus endlich vielen Elementen bestehende Basis besitzt, nämlich $(E_1, \ldots, E_r)$, wo E_i die spezielle r-zeilige, einspaltige Matrix bedeutet, in der in der i-ten Zeile die Eins, sonst überall die Null des Ringes $\mathfrak{o}$ steht. Hieraus folgt aber, daß jeder Untermodul von $\mathfrak{o}_r'$, insbesondere auch $|\mathfrak{a}_r)'$, ebenfalls ein Erzeugendensystem besitzen muß, das aus endlich vielen Elementen besteht, da in $\mathfrak{o}$ der Teilerkettensatz vorausgesetzt wurde. Ist $(S_1, \ldots, S_t)$ ein solches Basissystem von $|\mathfrak{a}_r)'$, so wird das Ideal $|\mathfrak{a}_r)$ offenbar von der aus den Spalten $S_1, \ldots, S_t$ zusammengesetzten Matrix erzeugt.

Satz 7. *Es werde in* $\mathfrak{o}$ *die Gültigkeit des Teilerkettensatzes und im* $\mathfrak{o}$*-Modul* $\mathfrak{O}_\mathfrak{o}$ *die Existenz eines Erzeugendensystems* $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ *vorausgesetzt, das aus endlich vielen Elementen besteht. Unter dieser Bedingung muß bekanntlich auch jedes Ideal* $\mathfrak{A}$ *von* $\mathfrak{O}$ — *als* $\mathfrak{o}$*-Modul gedeutet* — *ein aus endlich vielen Elementen bestehendes Erzeugendensystem* $(\mathsf{A}_1 \ldots, \mathsf{A}_p)$ *besitzen. Ist nun U eine Übergangsmatrix von* $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ *zu* $(\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_p)$ [so daß also $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r) \cdot U = (\mathsf{A}_1 \ldots, \mathsf{A}_p)$ gilt] *und V eine erzeugende Matrix des annullierenden Ideals von* $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ [12]), *so ist $N\mathfrak{A}$ der* (in $\mathfrak{o}$ gebildete) *größte gemein-*

---

[11]) H. Grell, Zur Theorie der Ordnungen in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Ann. **97** (1927), S. 524—558, insbesondere S. 542.

[12]) Das annullierende Ideal des Erzeugendensystems $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ von $\mathfrak{O}_\mathfrak{o}$ ist die Menge $|\mathfrak{a}_r)$ aller r-reihigen, quadratischen Matrizen $(a_{\mu\nu})$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$, die für jedes $\nu = 1, \ldots, r$ der Bedingung $\Sigma\, \Omega_\mu\, a_{\mu\nu} = 0$ genügen. Offenbar ist $|\mathfrak{a}_r)$ ein Rechtsideal des Ringes $\mathfrak{o}_r$ aller r-reihigen, quadratischen Matrizen, die sich aus den Elementen von $\mathfrak{o}$ bilden lassen. Die Forderung, daß $V = (v_{ij})$ eine erzeugende Matrix von $|\mathfrak{a}_r)$ sein soll, besagt also auf Grund der dem Satz 7 vorausgeschickten Definition: 1. daß die Relationen $R_1 \equiv \Sigma\, \Omega_i\, v_{i1}, \ldots, R_q \equiv \Sigma\, \Omega_i\, v_{iq} = 0$ gelten,

schaftliche Idealteiler $\mathfrak{c}$ *der Determinanten aller Matrizen, die aus der Matrix*

$$P = \overbrace{\boxed{U \mid V}}^{p+q=s}\Big\}r \qquad \underbrace{}_{s}$$

durch Streichung von $s - r$ *beliebigen Spalten entstehen; im Fall* $r > s$ *ist* $N\mathfrak{A} = 0$.

Beweis. Der Fall $s < r$ läßt sich auf den Fall $s \geqq r$ zurückführen, indem jede Reihe von P mit $r - s$ Nullen aufgefüllt wird; es genügt daher, den Fall $s \geqq r$ zu betrachten. Man erhält $\mathfrak{d}\{(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_\mathfrak{o}\} = N\mathfrak{A}$, indem man alle r-reihigen, quadratischen Matrizen $R = (a_{\mu\nu})$ aufsucht, die der Bedingung

$$(1) \qquad \begin{cases} \sum_{\mu=1}^{r} \Omega_\mu a_{\mu\nu} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{A}} & (\nu = 1, 2, \ldots, r) \\ a_{\mu\nu} \in \mathfrak{o} \end{cases}$$

genügen und das von den Determinanten $|R|$ erzeugte Ideal in $\mathfrak{o}$ bildet.

Ist $S = (b_{\mu\nu})$ irgendeine Matrix, die von P nach Fortstreichung von $s - r$ beliebigen Spalten übrigbleibt, so ist für S immer die Bedingung (1) erfüllt; infolgedessen ist $|S| \in N\mathfrak{A}$, d. h.

$$(2) \qquad \mathfrak{c} \leqq N\mathfrak{A}.$$

$R = (a_{\mu\nu})$ sei eine beliebige r-reihige, quadratische Matrix, die der Bedingung (1) genügt. Ich setze

$$(1a) \qquad (\Omega_1, \ldots, \Omega_r) \cdot R = (\mathsf{A}_1^*, \ldots, \mathsf{A}_r^*).$$

Die Elemente A_i^* sind wegen (1) in $\mathfrak{A}$ enthalten. Da $(\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_p)$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{A}_\mathfrak{o}$ sein sollte, gibt es eine Matrix W mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$, für die

$$(3) \qquad (\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_p) \cdot W = (\mathsf{A}_1^*, \ldots, \mathsf{A}_r^*)$$

wird. Weiter ist nach Definition von U

$$(4) \qquad (\Omega_1, \ldots, \Omega_r) \cdot U = (\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_p).$$

Aus (1a), (3) und (4) folgt, daß $R - UW$ zum annullierenden Ideal der Basis $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ von $\mathfrak{O}_\mathfrak{o}$ gehört. Daher gibt es eine Matrix X mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$ derart, daß

$$VX = R - UW, \quad R = VX + UW$$

gilt. Bilde ich die Matrix $Q = \begin{pmatrix} W \\ X \end{pmatrix}$, so bringt die Gleichung $UW + VX = R$ das Bestehen der Matrixgleichung $PQ = R$ zum Ausdruck; diese besagt aber nach einem bekannten Satz der Determinantentheorie, daß $|R|$ in dem Ideal $\mathfrak{c}$ enthalten ist. Es ist also $N\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{c}$, was mit (2) zusammen $N\mathfrak{A} = \mathfrak{c}$ ergibt.

Es sei jetzt $\mathfrak{o}$ *Hauptidealring,* $\mathfrak{O}_\mathfrak{o}$ *wie in Satz* 7 *von endlich vielen Elementen erzeugbar und außerdem „rein-unendlich", d. h. kein Element* $a \in \mathfrak{o}$ *Nullteiler des Ringes* $\mathfrak{O}$. Dann können in Satz 7 die Systeme $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ und $(\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_p)$ bekanntlich stets so gewählt werden, daß $V = 0$ und $r = p$ ausfällt und daher $N\mathfrak{A}$ mit dem Hauptideal übereinstimmt, das von der Determinante der (jetzt quadratischen!) Übergangsmatrix U von $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ zu $(\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_r)$ erzeugt wird. *In diesem Spezialfall erweist sich also die Normendefinition der vorliegenden Arbeit mit der üblichen als äquivalent. Das gleiche gilt, wenn* $\mathfrak{o}$ *der Ring der ganzrationalen Zahlen ist, sogar dann, wenn sich* $\mathfrak{O}_\mathfrak{o}$ *nicht von endlich*

2. daß $R_1 = 0, \ldots, R_q = 0$ ein zu dem Erzeugendensystem $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ gehöriges System *definierender* Relationen für den Modul $\mathfrak{O}_\mathfrak{o}$ bilden, aus denen jede weitere Relation $R \equiv \Sigma \Omega_i v_i = 0$ als Folgerelation, d. h. durch rechtsseitige Linearkombination mit Koeffizienten c_j aus $\mathfrak{o}$ hervorgeht: $R \equiv R_1 c_1 + R_2 c_2 + \cdots + R_q c_q = 0$. Daß zu $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ ein System aus endlich vielen definierenden Relationen existiert, ist — wie in der dem Satz 7 vorausgehenden Betrachtung gezeigt wurde — eine Folge des in $\mathfrak{o}$ vorausgesetzten Teilerkettensatzes.

vielen Elementen erzeugen läßt und wenn in $\mathfrak{o}$ *Zahlen existieren, die in* $\mathfrak{O}$ *Nullteiler sind.* Unter den genannten Voraussetzungen über $\mathfrak{o}$ ist nämlich $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_\mathfrak{o}$ immer eine *endliche*, gewöhnliche, abelsche Gruppe, da in $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_\mathfrak{o}$ der Doppelkettensatz gelten soll, und $\mathfrak{d}\{(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_\mathfrak{o}\} = N\mathfrak{A}$ nach Satz VI (Einleitung) dasjenige Hauptideal von $\mathfrak{o}$, das von der Ordnung dieser Gruppe, d. h. von der Anzahl der Restklassen, in die $\mathfrak{O}$ mod $\mathfrak{A}$ zerfällt, erzeugt wird.

§ 2. Erster Spezialfall.

$\mathfrak{o}$ sei von nun an immer ein Ring vom Typus der Hauptordnung eines algebraischen Zahlkörpers endlichen Grades, d. h. ein 5-Axiomering im Sinne von E. Noether. Über den Ring $\mathfrak{O}$ werden darüber hinaus in diesem Paragraphen noch keine weiteren einschränkenden Voraussetzungen gemacht.

Satz 8. *Bei jeder Darstellung des Ideals* $\mathfrak{A}$ *von* $\mathfrak{O}$ *als direkter Durchschnitt von Primäridealen* $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_k$ (vgl. hierzu die Bemerkung vor Satz 6) *wird*

$$N\mathfrak{A} = (\mathfrak{P}_1^* \cap \mathfrak{o})^{l_1} \cdots (\mathfrak{P}_k^* \cap \mathfrak{o})^{l_k},$$

falls $\mathfrak{P}_\varkappa^*$ *das zu* $\mathfrak{Q}_\varkappa$ *gehörige Primideal und* $l_\varkappa$ *die Kompositionsreihenlänge von* $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_\varkappa)_\mathfrak{o}$ *bezeichnet.*

Beweis. Da nach Satz 6 $N\mathfrak{A} = N\mathfrak{Q}_1 \cdots N\mathfrak{Q}_k$ ist, kommt es nur darauf an, zu zeigen, daß $N\mathfrak{Q}_\varkappa = (\mathfrak{P}_\varkappa^* \cap \mathfrak{o})^{l_\varkappa}$ gilt. Dies ergibt sich aber sofort, wenn man auf die Glieder $\mathfrak{U}_\lambda$ einer Kompositionsreihe

$$\mathfrak{U}_0 < \mathfrak{U}_1 < \cdots < \mathfrak{U}_\lambda < \cdots < \mathfrak{U}_{l_\varkappa} = (\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_\varkappa)_\mathfrak{o}$$

des Moduls $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_\varkappa)_\mathfrak{o}$ Satz V der Einleitung anwendet. Man findet dann

$$N\mathfrak{Q}_\varkappa = \mathfrak{d}\{(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_\varkappa)_\mathfrak{o}\} = \mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1/\mathfrak{U}_0) \cdot \mathfrak{d}(\mathfrak{U}_2/\mathfrak{U}_1) \cdots \mathfrak{d}(\mathfrak{U}_{l_\varkappa}/\mathfrak{U}_{l_\varkappa - 1}).$$

Nun ist das annullierende Ideal $\mathfrak{Q}_\varkappa \cap \mathfrak{o}$ von $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_\varkappa)_\mathfrak{o}$ nach Satz 4 ein Primärideal und $\mathfrak{P}_\varkappa^* \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}_\varkappa$ das zugehörige Primideal. Daher sind die einfachen Restklassenmoduln $\mathfrak{U}_{\lambda+1}/\mathfrak{U}_\lambda$ alle mit $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_\varkappa$ isomorph. Hieraus folgt wegen $\mathfrak{d}(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_\varkappa) = \mathfrak{p}_\varkappa$

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{U}_{\lambda+1}/\mathfrak{U}_\lambda) = \mathfrak{p}_\varkappa, \quad \text{also} \quad N\mathfrak{Q}_\varkappa = \mathfrak{p}_\varkappa^{l_\varkappa}.$$

Satz 9. *Ist* $\mathfrak{O}$ *kommutativ, so gilt*

$$N\mathfrak{A} = (N\mathfrak{P}_1)^{e_1} \cdots (N\mathfrak{P}_k)^{e_k} = (\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{o})^{f_1 e_1} \cdots (\mathfrak{P}_k \cap \mathfrak{o})^{f_k e_k}$$

wenn — unter $\mathfrak{A} = \mathfrak{Q}_1 \cdots \mathfrak{Q}_k$ *die eindeutig bestimmte Zerlegung von* $\mathfrak{A}$ *in das Produkt paarweise teilerfremder Primärideale verstanden —* $\mathfrak{P}_\varkappa$ *das zu* $\mathfrak{Q}_\varkappa$ *gehörige Primideal,* $e_\varkappa$ *die Kompositionsreihenlänge des* $\mathfrak{O}$*-Moduls* $\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_\varkappa$ *und* $f_\varkappa$ *den Grad des Primideals* $\mathfrak{P}_\varkappa$ *bezüglich* $\mathfrak{o}$ (d. h. den Rang von $(\mathfrak{O}/\mathfrak{P}_\varkappa)_\mathfrak{o}$) *bedeutet* [13]).

Beweis. Die einfachen Restklassenmoduln $\mathfrak{V}_{\lambda+1}/\mathfrak{V}_\lambda$, die von je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern $\mathfrak{V}_\lambda$, $\mathfrak{V}_{\lambda+1}$ einer Kompositionsreihe des $\mathfrak{O}$-Moduls $\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_\varkappa$ erzeugt werden, sind alle mit $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}_\varkappa$ isomorph. $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_\varkappa)_\mathfrak{o}$ hat daher die Länge $l_\varkappa = e_\varkappa f_\varkappa$; denn die Länge von $(\mathfrak{O}/\mathfrak{P}_\varkappa)_\mathfrak{o}$ ist $f_\varkappa$, was wir schon beim Beweis des Satzes 3 feststellten. Nach Satz 8 wird also

$$N\mathfrak{A} = (\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{o})^{e_1 f_1} \cdots (\mathfrak{P}_k \cap \mathfrak{o})^{e_k f_k},$$

woraus nach Satz 3 schließlich

$$N\mathfrak{A} = (N\mathfrak{P}_1)^{e_1} \cdots (N\mathfrak{P}_k)^{e_k}$$

hervorgeht.

---

[13]) Vgl. H. Grell, a. a. O. [11]).

Satz 10. *$\mathfrak{o}'$ sei ein $\mathfrak{o}$ umfassender 5-Axiomering im Sinne von E. Noether, der im Zentrum von $\mathfrak{O}$ enthalten ist; es gilt dann*

$$N_{\mathfrak{O}/\mathfrak{o}}(\mathfrak{A}) = N_{\mathfrak{o}'/\mathfrak{o}}(N_{\mathfrak{O}/\mathfrak{o}'}(\mathfrak{A}))$$

für alle Ideale des Ringes $\mathfrak{O}$, für die $N_{\mathfrak{O}/\mathfrak{o}}$ definiert ist.

$\mathfrak{O}$ braucht in diesem Satz nicht kommutativ zu sein.

Beweis. Es sei

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_k$$

irgendeine Darstellung von $\mathfrak{A}$ als direkter Durchschnitt primärer Ideale. Mit $\mathfrak{P}_i^*$ werde das zu $\mathfrak{Q}_i$ gehörige Primideal bezeichnet. Zur Abkürzung werde $\mathfrak{P}_i^* \cap \mathfrak{o}' = \mathfrak{p}_i'$ und $\mathfrak{P}_i^* \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}_i$ gesetzt. Die Numerierung der $\mathfrak{Q}_i$ denken wir uns so vorgenommen, daß

$$\underline{\mathfrak{p}_1' = \mathfrak{p}_2' = \cdots = \mathfrak{p}_\alpha'}, \underline{\mathfrak{p}_{\alpha+1}' = \cdots = \mathfrak{p}_\beta'}, \ldots, \underline{\mathfrak{p}_{\mu+1}' = \cdots = \mathfrak{p}_\nu'}$$

ausfällt, während $\mathfrak{p}_\alpha', \mathfrak{p}_\beta', \ldots, \mathfrak{p}_\mu', \mathfrak{p}_\nu'$ voneinander verschieden sind.

Bedeutet l_i (bzw. l_i') die Länge des Moduls $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_i)_{\mathfrak{o}}$ (bzw. $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_i)_{\mathfrak{o}'}$), so wird nach Satz 8:

$$(1) \qquad N_{\mathfrak{O}/\mathfrak{o}'}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{p}_1'^{l_1'} \cdots \mathfrak{p}_k'^{l_k'} = \mathfrak{p}_\alpha'^{l_1'+\cdots+l_\alpha'} \cdots \mathfrak{p}_\nu'^{l_{\mu+1}'+\cdots+l_\nu'},$$

$$(2) \qquad N_{\mathfrak{O}/\mathfrak{o}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{p}_1^{l_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{l_k} = \mathfrak{p}_\alpha^{l_1+\cdots+l_\alpha} \cdots \mathfrak{p}_\nu^{l_{\mu+1}+\cdots+l_\nu}.$$

Die einfachen Restklassenmoduln, die von aufeinanderfolgenden Gliedern einer Kompositionsreihe des Moduls $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_i)_{\mathfrak{o}'}$ erzeugt werden, sind offenbar alle mit $\mathfrak{o}'/\mathfrak{p}_i'$ isomorph. $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_i)_{\mathfrak{o}}$ hat daher die Länge $l_i = l_i' f_i$, falls die Länge von $(\mathfrak{o}'/\mathfrak{p}_i')_{\mathfrak{o}}$, d. h. der Grad von $\mathfrak{p}_i'$ bezüglich $\mathfrak{o}$, mit f_i bezeichnet wird. Es gilt also

$$(3) \qquad N_{\mathfrak{O}/\mathfrak{o}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{p}_\alpha^{(l_1'+\cdots+l_\alpha')f_\alpha} \cdots \mathfrak{p}_\nu^{(l_{\mu+1}'+\cdots+l_\nu')f_\nu}.$$

Nach bekannten Sätzen über Ringe vom Typus der Hauptordnung eines algebraischen Zahlkörpers endlichen Grades haben die Moduln

$$\mathfrak{o}'/\mathfrak{p}_\alpha'^{l_1'+\cdots+l_\alpha'}, \ldots, \mathfrak{o}'/\mathfrak{p}_\nu'^{l_{\mu+1}'+\cdots+l_\nu'}$$

resp. die Längen $(l_1' + \cdots + l_\alpha'), \ldots, (l_{\mu+1}' + \cdots + l_\nu')$. Nach Satz 9 wird daher wegen $\mathfrak{p}_i = (\mathfrak{P}_i^* \cap \mathfrak{o}') \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}_i' \cap \mathfrak{o}$

$$(4) \qquad N_{\mathfrak{o}'/\mathfrak{o}}\{\mathfrak{p}_\alpha'^{l_1'+\cdots+l_\alpha'} \cdots \mathfrak{p}_\nu'^{l_{\mu+1}'+\cdots+l_\nu'}\} = \mathfrak{p}_\alpha^{(l_1'+\cdots+l_\alpha')f_\alpha} \cdots \mathfrak{p}_\nu^{(l_{\mu+1}'+\cdots+l_\nu')f_\nu}.$$

Aus (1), (3) und (4) ergibt sich die Behauptung.

§ 3. Der Spezialfall der hyperkomplexen Zahlentheorie.

Bis zum Schluß der Arbeit sei jetzt $\mathfrak{O}$ immer Maximalordnung einer einfachen Algebra A, $\mathfrak{o}$ die Hauptordnung eines Körpers K, der den Grundkörper P von A umfaßt und im Zentrum Z von A enthalten ist: $\mathsf{P} \subseteqq \mathsf{K} \subseteqq \mathsf{Z} \subseteqq A$. P wird als Quotientenkörper eines Noetherschen 5-Axiomerings $\mathfrak{r}$ und Z als separable Erweiterung über P vorausgesetzt.

Ich betrachte zunächst den Spezialfall einer *kommutativen* Algebra A, da seine Behandlung besonders einfach ist.

Hauptsatz $\mathbf{a}_1$. *Für zwei Ideale* [14]) *$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ des Ringes $\mathfrak{O}$ gilt*

$$N\mathfrak{A}\mathfrak{B} = N\mathfrak{A} \cdot N\mathfrak{B}.$$

Beweis. Man bestätigt die Behauptung durch Untersuchung der Struktur des

[14]) Von den in diesem Paragraphen vorkommenden Idealen setze ich — wie allgemein üblich — voraus, daß sie *nichtsingulär* sind, d. h. mindestens einen Nichtnullteiler enthalten.

Restklassenmoduls $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Mod $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist $\mathfrak{A}$ bekanntlich Hauptideal und daher $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ein zyklischer (von einem Element erzeugbarer) Modul; außerdem ist $\mathfrak{B}$ das annullierende Ideal (vgl. Fußnote 3) von $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Infolgedessen ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{O}/\mathfrak{B}$ isomorph, also

$$\mathfrak{d}\{\mathfrak{A}_0/(\mathfrak{A}\mathfrak{B})_0\} = N\mathfrak{B}\,.$$

Nach Satz V (Einleitung) wird daher

$$N\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{d}\{(\mathfrak{O}/\mathfrak{A}\mathfrak{B})_0\} = \mathfrak{d}\{\mathfrak{O}_0/\mathfrak{A}_0\}\cdot\mathfrak{d}\{\mathfrak{A}_0/(\mathfrak{A}\mathfrak{B})_0\} = N\mathfrak{A}\cdot N\mathfrak{B}\,.$$

In der Idealtheorie einer Maximalordnung $\mathfrak{O}$ betrachtet man neben den ganzen (in $\mathfrak{O}$ enthaltenen) Idealen noch gebrochene Ideale, die sich bekanntlich als Quotienten ganzer Ideale darstellen lassen. *Für die gebrochenen Ideale* $\mathfrak{C}$ *läßt sich jetzt* mit Hilfe des Hauptsatzes a_1 *ebenfalls eine Norm* $N\mathfrak{C}$ *bezüglich* $\mathfrak{o}$ *definieren, indem man — unter* $\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ *irgendeine Darstellung von* $\mathfrak{C}$ *als Quotient ganzer Ideale verstanden —* $N\mathfrak{C} = \frac{N\mathfrak{A}}{N\mathfrak{B}}$ *setzt.* Hierdurch ist $N\mathfrak{C}$ wegen des Hauptsatzes a_1 *eindeutig* festgelegt; denn für ganze Ideale $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ folgt aus $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}'}$, daß $\mathfrak{A}\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}\mathfrak{A}'$, also auch

$$N\mathfrak{A}\cdot N\mathfrak{B}' = N\mathfrak{B}\cdot N\mathfrak{A}', \qquad \frac{N\mathfrak{A}}{N\mathfrak{B}} = \frac{N\mathfrak{A}'}{N\mathfrak{B}'}$$

gilt. *Durch die Festsetzung*

$$N\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{N\mathfrak{A}}{N\mathfrak{B}}$$

wird der Gültigkeitsbereich des Hauptsatzes a_1 *auf das Gebiet aller ganzen und gebrochenen Ideale ausgedehnt.*

Ist A ein algebraischer Zahlkörper endlichen Grades, so pflegt man in der Zahlentheorie eine Norm $n(\mathfrak{A})$ bezüglich $\mathfrak{o}$ als das Produkt aller zu $\mathfrak{A}$ relativ konjugierten Ideale $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$ einzuführen: $n(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}'\cdots$. Für $n(\mathfrak{A})$ gilt bekanntlich

1) $n(\mathfrak{A}) = [n(\mathfrak{P}_1)]^{e_1}\cdots[n(\mathfrak{P}_k)]^{e_k}$, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{P}_k^{e_k}$ die Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in das Produkt paarweise teilerfremder Primidealpotenzen bedeutet,

2) $n(\mathfrak{P}_\varkappa) = (\mathfrak{P}_\varkappa \cap \mathfrak{o})^{f_\varkappa}$, falls $\mathfrak{P}_\varkappa$ bezüglich $\mathfrak{o}$ den Grad $f_\varkappa$ hat. Nun ist nach Satz 3 (§ 1) auch

3) $$N\mathfrak{P}_\varkappa = (\mathfrak{P}_\varkappa \cap \mathfrak{o})^{f_\varkappa}$$

und nach dem Hauptsatz a_1

4) $$N\mathfrak{A} = (N\mathfrak{P}_1)^{e_1}\cdots(N\mathfrak{P}_k)^{e_k}\,,$$

was übrigens auch unmittelbar aus Satz 9 (§ 2) hervorgeht, da der $\mathfrak{O}$-Modul $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}_\varkappa^{e_\varkappa}$ bekanntlich die Kompositionsreihenlänge $e_\varkappa$ hat. *Ein Vergleich der Formeln* 1), 2), 3), 4) *zeigt, daß auch im Spezialfall der algebraischen Zahlentheorie die Normendefinition dieser Arbeit mit der üblichen gleichwertig ist.*

Im *Nichtkommutativen*, dem ich mich jetzt zuwende, betrachte ich gleichzeitig *alle* Maximalordnungen $\mathfrak{O}_{11}, \mathfrak{O}_{22}, \ldots$ von A und alle (*nichtsingulären*) Ideale [14]) der Ringe $\mathfrak{O}_{ii}$. Ich bezeichne diese Ideale mit großen deutschen Buchstaben mit angehängten Doppelindizes, z. B. $\mathfrak{A}_{ij}$, wodurch zum Ausdruck gebracht werden soll, daß $\mathfrak{O}_{ii}$ die Links-, $\mathfrak{O}_{jj}$ die Rechtsordnung von $\mathfrak{A}_{ij}$ ist. Im Fall $i \neq j$ hat man, da man $\mathfrak{A}_{ij}$ ebenso gut als Linksideal in $\mathfrak{O}_{ii}$ wie als Rechtsideal in $\mathfrak{O}_{jj}$ ansehen kann, zunächst eine rechts- und eine linksseitige Norm $N_r\mathfrak{A}_{ij}$ und $N_l\mathfrak{A}_{ij}$ zu unterscheiden. Wir werden aber sehen, daß beide Normen übereinstimmen, so daß man schließlich doch von einer eindeutig bestimmten

Norm $N\mathfrak{A}_{ij} = N_r\mathfrak{A}_{ij} = N_l\mathfrak{A}_{ij}$ sprechen kann. Hauptziel der folgenden Überlegungen ist zunächst der Beweis des bekannten, im Nichtkommutativen für eigentliche Idealprodukte geltenden Analogons zu Hauptsatz a_1, der sich aus einigen vorbereitenden Sätzen ergeben wird, die ich jetzt vorausschicke.

Satz 11. *Gleichseitige Primideale, die durch Transformation auseinander hervorgehen, haben dieselbe Norm:*

$$N\mathfrak{P}_{ii} = N(\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{P}_{ii}\mathfrak{A}_{ji}^{-1}).$$

Beweis. Zur Abkürzung werde $\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{P}_{ii}\mathfrak{A}_{ji}^{-1} = \mathfrak{P}_{jj}$ gesetzt. Es ist dann $\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{P}_{ii} = \mathfrak{P}_{jj}\mathfrak{A}_{ji}$, also auch

$$\mathfrak{A}_{ji_0}/(\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{P}_{ii})_0 = \mathfrak{A}_{ji_0}/(\mathfrak{P}_{jj}\mathfrak{A}_{ji})_0. \tag{1}$$

Da man $\mathfrak{A}_{ji}$ als ganzes Ideal voraussetzen darf, ergibt sich aus $\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{P}_{ii} = \mathfrak{P}_{jj}\mathfrak{A}_{ji}$, daß $\mathfrak{P}_{ii}$ und $\mathfrak{P}_{jj}$ bei der Darstellung als eigentliche Produkte unzerlegbarer Ideale in gleichviele Faktoren zerfallen. Daher haben $\mathfrak{O}_{jj}/\mathfrak{P}_{jj}$ und $\mathfrak{A}_{ji}/(\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{P}_{ii})$, als Linksmoduln in bezug auf $\mathfrak{O}_{jj}/\mathfrak{P}_{jj}$ aufgefaßt, dieselbe Kompositionsreihenlänge [15]), woraus weiter folgt, daß diese Moduln sogar isomorph sein müssen, da ihr Operatorenring $\mathfrak{O}_{jj}/\mathfrak{P}_{jj}$ zweiseitig einfach und vollständig reduzibel (direkte Summe endlich vieler, einfacher Linksideale) ist; es gilt daher auch

$$\mathfrak{O}_{jj_0}/\mathfrak{P}_{jj_0} \cong \mathfrak{A}_{ji_0}/(\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{P}_{ii})_0. \tag{2}$$

Durch eine entsprechende, nur unwesentlich modifizierte Überlegung beweist man

$$\mathfrak{O}_{ii_0}/\mathfrak{P}_{ii_0} \cong \mathfrak{A}_{ji_0}/(\mathfrak{P}_{jj}\mathfrak{A}_{ji})_0, \tag{3}$$

woraus mit (1) und (2) zusammen die Behauptung $N\mathfrak{P}_{ii} = N\mathfrak{P}_{jj}$ unmittelbar hervorgeht.

Satz 12. *$\mathfrak{P}_{jk}$ sei ein unzerlegbares Ideal. Ist $\mathfrak{P}_{ii}$ irgendein durch $\mathfrak{P}_{jk}$ teilbares gleichseitiges Primideal und zerfällt $\mathfrak{P}_{ii}$ in das eigentliche Produkt von n unzerlegbaren Faktoren, so ist*

$$N\mathfrak{P}_{ii} = (N_l\mathfrak{P}_{jk})^n = (N_r\mathfrak{P}_{jk})^n.$$

Bei unzerlegbaren Idealen ist infolgedessen die linksseitige Norm mit der rechtsseitigen identisch:

$$N_l\mathfrak{P}_{jk} = N_r\mathfrak{P}_{jk}.$$

Beweis. Da $\mathfrak{P}_{jk}$ in $\mathfrak{P}_{ii}$ aufgehen soll, gibt es zwei ganze Ideale $\mathfrak{A}_{ij}$, $\mathfrak{A}_{ki}$, die der Bedingung $\mathfrak{P}_{ii} = \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jk}\mathfrak{A}_{ki}$ genügen. Ich setze $\mathfrak{P}_{kk} = \mathfrak{A}_{ki}\mathfrak{P}_{ii}\mathfrak{A}_{ki}^{-1} = \mathfrak{A}_{ki}\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jk}$. Es ist dann $N\mathfrak{P}_{ii} = N\mathfrak{P}_{kk}$. Zur Bestätigung der Gleichung $N\mathfrak{P}_{ii} = (N\mathfrak{P}_{jk})^n$ genügt es daher, $N\mathfrak{P}_{kk} = (N_r\mathfrak{P}_{jk})^n$ zu beweisen. Das letztere ergibt sich aber — nach Satz IV (Einleitung) — unmittelbar daraus, daß $\mathfrak{O}_{kk}/\mathfrak{P}_{kk}$ in die direkte Summe von *genau n* einfachen $\mathfrak{O}_{kk}$-Rechtsmoduln zerfällt, die alle mit $\mathfrak{O}_{kk}/\mathfrak{P}_{jk}$ isomorph sind. Genauso beweist man $N\mathfrak{P}_{ii} = (N_l\mathfrak{P}_{jk})^n$, nur muß man jetzt an Stelle von $\mathfrak{P}_{kk}$ das (zweiseitige) Primideal $\mathfrak{P}_{jj} = \mathfrak{A}_{ij}^{-1}\mathfrak{P}_{ii}\mathfrak{A}_{ij} = \mathfrak{P}_{jk}\mathfrak{A}_{ki}\mathfrak{A}_{ij}$ des Ringes $\mathfrak{O}_{jj}$, an Stelle einer direkten Summenzerlegung von $\mathfrak{O}_{kk}/\mathfrak{P}_{kk}$ in einfache $\mathfrak{O}_{kk}$-*Rechts*moduln eine solche von $\mathfrak{O}_{jj}/\mathfrak{P}_{jj}$ in einfache $\mathfrak{O}_{jj}$-*Links*moduln betrachten.

Aus den Sätzen 11 und 12 folgt

Satz 13. *Zwei unzerlegbare Ideale $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}$, $\mathfrak{P}_{\gamma\delta}$ haben stets dieselbe Norm, wenn $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}$ in dem gleichseitigen Primideal $\mathfrak{P}_{ii}$, $\mathfrak{P}_{\gamma\delta}$ in dem gleichseitigen Primideal $\mathfrak{P}_{jj}$ aufgeht und $\mathfrak{P}_{ii}$, $\mathfrak{P}_{jj}$ durch Transformation auseinander hervorgehen:* $\mathfrak{P}_{ii} = \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jj}\mathfrak{A}_{ij}^{-1}$.

---

[15]) An sich kann man zunächst nur schließen, daß $\mathfrak{O}_{jj}/\mathfrak{P}_{jj}$ und $\mathfrak{A}_{ji}/(\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{P}_{ii})$ als Linksmoduln in bezug auf $\mathfrak{O}_{jj}$ gleiche Kompositionsreihenlänge haben. Da jedoch beide Moduln linksseitig von $\mathfrak{P}_{jj}$ annulliert werden, lassen sie sich auch als Linksmoduln in bezug auf $\mathfrak{O}_{jj}/\mathfrak{P}_{jj}$ deuten, was auf die Kompositionsreihen keinen Einfluß hat.

Satz 14. *Für unzerlegbare Ideale* $\mathfrak{P}_{jk}$, $\mathfrak{P}_{ki}$ *und irgendein ganzes Ideal* $\mathfrak{A}_{ij}$ *gilt*

(IIa) $$N_l(\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jk}) = N_l\mathfrak{A}_{ij} \cdot N\mathfrak{P}_{jk}\,,$$

(IIb) $$N_r(\mathfrak{P}_{ki}\mathfrak{A}_{ij}) = N\mathfrak{P}_{ki} \cdot N_r\mathfrak{A}_{ij}\,.$$

Beweis. Nach Satz V (Einleitung) ist

(1) $$N_l(\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jk}) = N_l\mathfrak{A}_{ij} \cdot \mathfrak{d}\{\mathfrak{A}_{ij_0}/(\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jk})_0\}\,.$$

Da $\mathfrak{A}_{ij}/\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jk}$ ein einfacher (also auch zyklischer!) $\mathfrak{O}_{ii}$-Linksmodul ist, gibt es in $\mathfrak{O}_{ii}$ ein (natürlich unzerlegbares) Ideal $\mathfrak{P}_{il}$ (mit der Linksordnung $\mathfrak{O}_{ii}$) derart, daß die $\mathfrak{O}_{ii}$-Linksmoduln $\mathfrak{O}_{ii}/\mathfrak{P}_{il}$, $\mathfrak{A}_{ij}/(\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jk})$ isomorph sind. Das annullierende Ideal dieser Moduln (vgl. Fußnote 3) ist offenbar das durch $\mathfrak{P}_{il}$ teilbare, zweiseitige Primideal $\mathfrak{P}_{ii}$ des Ringes $\mathfrak{O}_{ii}$; infolgedessen wird

$$\mathfrak{P}_{ii}\mathfrak{A}_{ij} \leqq \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jk}, \qquad \mathfrak{A}_{ij}^{-1}\mathfrak{P}_{ii}\mathfrak{A}_{ij} \leqq \mathfrak{P}_{jk}$$

und daher nach Satz 13

$$N\mathfrak{P}_{jk} = N\mathfrak{P}_{il} = \mathfrak{d}\{(\mathfrak{O}_{ii}/\mathfrak{P}_{il})_0\} = \mathfrak{d}\{\mathfrak{A}_{ij_0}/(\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jk})_0\}\,,$$

was mit (1) zusammen (IIa) ergibt. Von einigen selbstverständlichen Modifikationen abgesehen, beweist man (IIb) genau so wie (IIa).

Aus Satz 14 erhält man jetzt unmittelbar

Hauptsatz b. *Links- und Rechtsnorm eines ganzen Ideals* $\mathfrak{A}_{ij}$ *stimmen überein.*

Beweis. Zerlegt man $\mathfrak{A}_{ij}$ in das eigentliche Produkt unzerlegbarer Ideale $\mathfrak{A}_{ij} = \mathfrak{P}_{i\alpha} \cdot \mathfrak{P}_{\alpha\beta} \cdots \mathfrak{P}_{\lambda j}$, so wird nach Satz 14

I. $$N_l\mathfrak{A}_{ij} = N\mathfrak{P}_{i\alpha} \cdot N\mathfrak{P}_{\alpha\beta} \cdots N\mathfrak{P}_{\lambda j} = N_r\mathfrak{A}_{ij}\,.$$

Hauptsatz a_2. *Die Norm des eigentlichen Produkts ganzer Ideale ist gleich dem Produkt aus den Normen der einzelnen Faktoren:*

II. $$N(\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{B}_{jk}) = N\mathfrak{A}_{ij} \cdot N\mathfrak{B}_{jk}\,.$$

Beweis. Folgt aus Satz 14, wenn man $\mathfrak{A}_{ij}$ und $\mathfrak{B}_{jk}$ in das eigentliche Produkt unzerlegbarer Faktoren zerlegt.

Die beiden Hauptsätze a_2 *und* b *wurden nur für ganze Ideale bewiesen und ausgesprochen. Selbstverständlich gelten sie aber auch für gebrochene Ideale*, was sich leicht in ähnlicher Weise beweisen läßt wie die Verallgemeinerung des Hauptsatzes a_1; man beachte dabei, daß jedes gebrochene Ideal $\mathfrak{C}_{ij}$ sich als Quotient von der Gestalt $\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{B}_{jj}^{-1}$ darstellen läßt, wo $\mathfrak{A}_{ij}$, $\mathfrak{B}_{jj}$ ganz sind und $\mathfrak{B}_{jj}$ insbesondere *gleichseitig* ist.

Herr Hasse hat für die in diesem Paragraphen betrachteten Ideale $\mathfrak{C}_{ij}$ eine $\mathfrak{p}$-adisch definierte Norm eingeführt [16]), die ich für den Augenblick mit $n(\mathfrak{C}_{ij})$ bezeichne. Ich will noch beweisen, *daß* $n(\mathfrak{C}_{ij})$ *mit* $N\mathfrak{C}_{ij}$ *übereinstimmt*, wobei ich der Einfachheit halber den Ring $\mathfrak{o}$ mit dem Zentrum $\mathfrak{z}$ der Ringe $\mathfrak{O}_{ii}$ identifiziere, was natürlich keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Offenbar genügt es, $\mathfrak{C}_{ij}$ unzerlegbar vorauszusetzen, da sowohl für die Norm n wie N der Normenproduktsatz (im Sinne des Hauptsatzes a_2) gilt. Bei einem unzerlegbaren Ideal $\mathfrak{P}_{ij}$ ist auf Grund des Satzes 3 (§ 1) $N\mathfrak{P}_{ij} = \mathfrak{p}^f$, wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_{ij} \cap \mathfrak{z}$ das Verengungsideal von $\mathfrak{P}_{ij}$ in $\mathfrak{z}$, und f den Grad von $\mathfrak{P}_{ij}$ in bezug auf $\mathfrak{z}$ bedeutet. Auf Grund desselben Satzes ist an der Stelle $\mathfrak{p}$ $N(\mathfrak{P}_{ij_\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}_\mathfrak{p}^{f_\mathfrak{p}}$, wenn $f_\mathfrak{p}$ den Grad von $\mathfrak{P}_{ij_\mathfrak{p}}$ in bezug auf $\mathfrak{z}_\mathfrak{p}$ bezeichnet und an jeder von $\mathfrak{p}$ verschiedenen Stelle $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ $N(\mathfrak{P}_{ij_\mathfrak{q}}) = \mathfrak{z}_\mathfrak{q}$. Hieraus folgt nach Satz 65 der zitierten Arbeit von Herrn Hasse $n(\mathfrak{P}_{ij}) = \mathfrak{p}^f$. Nun gibt es bekanntlich eine *isomorphe* (umkehrbar eindeutige, relationstreue) Abbildung

[16]) H. Hasse, Über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann. **104** (1931), § 8.

von $\mathfrak{O}_{ii_\mathfrak{p}}/\mathfrak{P}_{ij_\mathfrak{p}}$ auf $\mathfrak{O}_{ii}/\mathfrak{P}_{ij}$, bei der $\mathfrak{z}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{z}/\mathfrak{p}$ abgebildet wird. Daher ist $f = f_\mathfrak{p}$, womit

$$N\mathfrak{P}_{ij} = \mathfrak{p}^f = \mathfrak{p}^{f_\mathfrak{p}} = n(\mathfrak{P}_{ij})$$

bewiesen ist.

Neben den beiden in den Hauptsätzen a und b zum Ausdruck gebrachten Ergebnissen gilt für die Idealnormen der hyperkomplexen und der algebraischen Zahlentheorie noch eine weitere interessante Tatsache:

Hauptsatz c. *Zwei Ideale* $\mathfrak{A}_{ij}$ *und* $\mathfrak{B}_{kl}$ *sind stets und nur dann als* $\mathfrak{o}$*-Moduln isomorph, wenn ihre Normen bezüglich* $\mathfrak{o}$ *äquivalent sind*, d. h. zur selben (absoluten) Idealklasse der Ordnung $\mathfrak{o}$ gehören.

Zum Beweis dieses Satzes benötige ich

Hilfssatz 1. $\mathfrak{M}$ sei ein von endlich vielen Elementen erzeugbarer, rein-unendlicher [17]) $\mathfrak{o}$-Modul, $\mathfrak{M}'$ ein Untermodul von $\mathfrak{M}$, für den $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}'$ endlich [17]) ist. Es gilt dann

$$Kl(\mathfrak{M}') = Kl(\mathfrak{M}) \cdot Kl\{\mathfrak{d}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}')\}.$$

Beweis des Hilfssatzes. Da der Modul $\mathfrak{M}$ voraussetzungsgemäß rein-unendlich ist, läßt er sich in einen Modul $\mathfrak{M}^*$ einbetten, dessen Operatorenring der Quotientenkörper K von $\mathfrak{o}$ ist. Man erhält $\mathfrak{M}^*$ — ähnlich wie den Quotientenring eines kommutativen Ringes — indem man neue Symbole $\frac{\alpha}{a}$ einführt, wo α ein Element aus $\mathfrak{M}$ und a ein Element aus $\mathfrak{o}$ bedeutet, und festsetzt, daß $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}$ dann und nur dann gilt, wenn $\alpha b = \beta a$ ist, und daß

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\gamma}{c} = \frac{\alpha c + \gamma a}{ac}, \quad \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{d}{e} = \frac{\alpha d}{ae}$$

sein soll.

Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ganze Ideale des Ringes $\mathfrak{o}$, von denen $\mathfrak{a}$ zur Klasse [17]) $Kl(\mathfrak{M})$ und $\mathfrak{b}^{-1}$ zur Klasse $Kl(\mathfrak{M}')$ gehören möge. Nach dem Struktursatz von E. Steinitz (vgl. DM § 4) lassen sich in $\mathfrak{M}^*$ Elemente $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*$ und $\beta_1^*, \ldots, \beta_k^*$ so finden, daß $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ in die direkten Summen

$$\mathfrak{M} = \alpha_1^* \mathfrak{o} + \cdots + \alpha_{k-1}^* \mathfrak{o} + \alpha_k^* \mathfrak{a}$$
$$\mathfrak{M}' = \beta_1^* \mathfrak{o} + \cdots + \beta_{k-1}^* \mathfrak{o} + \beta_k^* \mathfrak{b}^{-1}$$

zerfallen. Für die $\mathfrak{o}$-Moduln

$$\overline{\mathfrak{M}} = \alpha_1^* \mathfrak{o} + \cdots + \alpha_k^* \mathfrak{o}$$

und

$$\overline{\mathfrak{M}}' = \beta_1^* \mathfrak{o} + \cdots + \beta_k^* \mathfrak{o}$$

gilt dann

$$\overline{\mathfrak{M}} \geqq \mathfrak{M} \geqq \mathfrak{M}' \geqq \overline{\mathfrak{M}}'$$

und

$$(1) \qquad \mathfrak{d}(\overline{\mathfrak{M}}/\mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{d}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}') \cdot \mathfrak{d}(\mathfrak{M}'/\overline{\mathfrak{M}}') = \mathfrak{d}(\overline{\mathfrak{M}}/\overline{\mathfrak{M}}') \quad \text{(Satz V, Einleitung)}.$$

Nun ist, wie man leicht bestätigt,

$$\mathfrak{d}(\overline{\mathfrak{M}}/\mathfrak{M}) = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{d}(\mathfrak{M}'/\overline{\mathfrak{M}}') = \mathfrak{b}$$

und $\mathfrak{d}(\overline{\mathfrak{M}}/\overline{\mathfrak{M}}')$ ein Hauptideal, nämlich das von der Determinante der Übergangsmatrix

[17]) Bezüglich der Begriffe, Bezeichnungen und Sätze, die bei der Formulierung und beim Beweis des Hilfssatzes 1 und in den anschließenden Betrachtungen benutzt werden, vergleiche man § 4 der Arbeit DM (siehe Fußnote 1).

von $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*)$ zu $(\beta_1^*, \ldots, \beta_k^*)$ erzeugte. Hieraus folgt in Verbindung mit (1)

$$Kl(\mathfrak{M}) \cdot Kl\{\mathfrak{d}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}')\} = Kl(\mathfrak{a}) \cdot Kl\{\mathfrak{d}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}')\} = Kl(\mathfrak{b}^{-1}) = Kl(\mathfrak{M}').$$

Beweis des Hauptsatzes c. Da die Ideale $\mathfrak{A}_{ij}$ und $\mathfrak{B}_{kl}$ als $\mathfrak{o}$-Moduln rein-unendlich sind und in bezug auf den Quotientenkörper von $\mathfrak{o}$ denselben Rang haben (so daß die Anzahl der direkt-unzerlegbaren Summanden, in deren direkte Summe $\mathfrak{A}_{ij}$ und $\mathfrak{B}_{kl}$ zerfallen, nach DM, § 4, Hilfssatz 7, bei beiden Moduln dieselbe ist) sind $\mathfrak{A}_{ij}$ und $\mathfrak{B}_{kl}$ als $\mathfrak{o}$-Moduln auf Grund des Steinitzschen Struktursatzes (DM, § 4) dann und nur dann isomorph, wenn die Idealklassen $Kl(\mathfrak{A}_{ij})$ und $Kl(\mathfrak{B}_{kl})$ identisch sind. Beim Beweis des Hauptsatzes c kommt es daher nur noch darauf an, zu zeigen, daß $Kl(\mathfrak{A}_{ij})$ mit $Kl(\mathfrak{B}_{kl})$ dann und nur dann übereinstimmt, wenn $N\mathfrak{A}_{ij}$ mit $N\mathfrak{B}_{kl}$ äquivalent ist. Dies folgt aber, weil $\mathfrak{A}_{ij}$ und $\mathfrak{B}_{kl}$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit als ganze Ideale vorausgesetzt werden dürfen, sofort aus dem vorausgeschickten Hilfssatz 1, demzufolge wegen der Endlichkeit der Moduln $(\mathfrak{O}_{ii}/\mathfrak{A}_{ij})_{\mathfrak{o}}$, $(\mathfrak{O}_{kk}/\mathfrak{B}_{kl})_{\mathfrak{o}}$

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{(a)} & Kl(\mathfrak{A}_{ij}) = Kl(\mathfrak{O}_{ii}) \cdot Kl\{\mathfrak{d}(\mathfrak{O}_{ii}/\mathfrak{A}_{ij})_{\mathfrak{o}}\} = Kl\,\mathfrak{O}_{ii} \cdot Kl(N\mathfrak{A}_{ij}) \\ \text{(b)} & Kl(\mathfrak{B}_{kl}) = Kl(\mathfrak{O}_{kk}) \cdot Kl(N\mathfrak{B}_{kl}) \end{cases}$$

gilt. Nun ist

$$(2) \qquad \begin{cases} \text{(a)} & Kl((\mathfrak{O}_{kk} \cdot \mathfrak{O}_{ii})^{-1}) = Kl\,\mathfrak{O}_{ii} \cdot Kl(N(\mathfrak{O}_{kk} \cdot \mathfrak{O}_{ii})^{-1}) \\ \text{(b)} & Kl((\mathfrak{O}_{kk} \cdot \mathfrak{O}_{ii})^{-1}) = Kl\,\mathfrak{O}_{jj} \cdot Kl(N(\mathfrak{O}_{kk} \cdot \mathfrak{O}_{ii})^{-1}), \end{cases}$$

also $Kl(\mathfrak{O}_{ii}) = Kl(\mathfrak{O}_{kk})$, woraus in Verbindung mit den Gleichungen (1) die Behauptung unmittelbar hervorgeht.

Als Spezialfall ergibt sich aus Hauptsatz c

Satz 16. *Alle Maximalordnungen der Algebra A sind als* $\mathfrak{o}$*-Moduln, ja sogar als* $\mathfrak{z}$*-Moduln isomorph, wenn* $\mathfrak{z}$ *die Hauptordnung des Zentrums* Z *von A bedeutet.* (Für Maximalordnungen von gleichem Typ ist diese Aussage natürlich trivial, bemerkenswert ist nur, daß auch Maximalordnungen verschiedener Typen als $\mathfrak{z}$-Moduln isomorph sind.)

Satz 16 gewinnt noch durch folgende Tatsache an Interesse:

Satz 17. *Ist* A^* *eine einfache Teilalgebra von A, die das Zentrum* Z *von A umfaßt,* $\mathfrak{O}^*$ *eine Maximalordnung von* A^* *und gibt es Maximalordnungen von A, welche* $\mathfrak{O}^*$ *als Teilmenge enthalten, so sind die letzteren, als* $\mathfrak{O}^*$*-Moduln aufgefaßt, im allgemeinen nicht isomorph, auch dann nicht, wenn* A^* *kommutativ (also Körper) ist. Isomorphie der* $\mathfrak{O}^*$ *umfassenden Maximalordnungen von A gilt in der Regel nur in dem Spezialfall* $A^* = \mathsf{Z}$.

Beweis. Ich bestätige die Behauptung durch ein Beispiel. Es sei Z der rationale Zahlkörper, Z_n die vollständige Matrixalgebra vom Grade n über Z (Ring aller n-reihigen, quadratischen Matrizen mit rationalen Koeffizienten). Weiter sei $\tilde{A}^*$ ein algebraischer Zahlkörper n-ten Grades über Z, $\tilde{\mathfrak{O}}^*$ seine Hauptordnung; von $\tilde{A}^*$ verlangen wir überdies, daß $\tilde{\mathfrak{O}}^*$ wenigstens ein Ideal $\tilde{\mathfrak{A}}^*$ enthält, dessen n-te Potenz kein Hauptideal ist, eine Bedingung, die sich i. a. leicht erfüllen läßt. Als Modul in bezug auf den Ring $\mathfrak{z}$ aller ganzrationalen Zahlen hat $\tilde{\mathfrak{O}}^*$ immer eine aus n linear unabhängigen Elementen bestehende Basis $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n)$, die zugleich als Basis für den Körper $\tilde{A}^*$ dienen kann, wenn $\tilde{A}^*$ als Z-Modul gedeutet wird. Vermöge der durch die Basis $(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)$ vermittelten regulären Darstellung erhalten wir jetzt in $A = \mathsf{Z}_n$ einen kommutativen Körper A^*, der auf $\tilde{A}^*$ isomorph bezogen ist, wobei $\tilde{\mathfrak{O}}^*$ in $\mathfrak{O}^*$, $\tilde{\mathfrak{A}}^*$ in $\mathfrak{A}^*$ übergeht. $\mathfrak{O}^*$ können wir gewiß in eine Maximalordnung $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}$ von $A = \mathsf{Z}_n$ einbetten; denn offenbar ist $\mathfrak{O}^*$ wegen der speziellen Voraussetzung über die Basis $(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)$ in der Maximalordnung $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha} = \mathfrak{z}_n$ enthalten, wobei $\mathfrak{z}_n$ der Ring aller n-reihigen, quadratischen Matrizen mit ganzrationalen

Koeffizienten bedeutet. Wir betrachten nun das Erweiterungsideal $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}\mathfrak{A}^*$ in $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}$, dessen Rechtsordnung $\mathfrak{O}_{\beta\beta}$ ebenfalls $\mathfrak{O}^*$ umfaßt. In $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha} = \mathfrak{z}_n$ ist bekanntlich jedes Ideal Hauptideal. Infolgedessen sind $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}$ und $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}\mathfrak{A}^*$ als Linksmoduln in bezug auf $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}$, also auch als $\mathfrak{O}^*$-Linksmoduln isomorph. Es ist daher

$$Kl^*(\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}) = Kl^*(\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}\mathfrak{A}^*) = Kl^*(\mathfrak{A}^*\mathfrak{O}_{\beta\beta})$$

(wobei das Symbol Kl^* diesmal eine Idealklasse des Körpers A^* bezeichnet). Wie man leicht einsieht, ist

$$Kl^*(\mathfrak{A}^*\mathfrak{O}_{\beta\beta}) = (Kl^*(\mathfrak{A}^*))^n \cdot Kl^*(\mathfrak{O}_{\beta\beta}).$$

Wären nun die beiden Ordnungen $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}$, $\mathfrak{O}_{\beta\beta}$ als $\mathfrak{O}^*$-Moduln isomorph, so wäre

$$Kl^*(\mathfrak{O}_{\beta\beta}) = Kl^*(\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}) = [Kl^*(\mathfrak{A}^*)]^n \cdot Kl^*(\mathfrak{O}_{\beta\beta})$$
$$[Kl^*(\mathfrak{A}^*)]^n = Kl^*(\mathfrak{O}^*),$$

d. h. $(\mathfrak{A}^*)^n$ Hauptideal, was der Voraussetzung widerspricht. Die beiden $\mathfrak{O}^*$ umfassenden Ordnungen $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}$ und $\mathfrak{O}_{\beta\beta}$ können also als $\mathfrak{O}^*$-Moduln nicht isomorph sein.

Im Anschluß an Hauptsatz c definiere ich jetzt noch einen neuen Klassenbegriff für die Ideale der Maximalordnungen von A, der einerseits als natürliche Verallgemeinerung des in der algebraischen Zahlentheorie gebräuchlichen Klassenbegriffs angesehen werden kann, andrerseits die Definition einer Multiplikation beliebiger Klassen ermöglicht, derart, daß die letzteren bei multiplikativer Verknüpfung eine gewöhnliche, abelsche Gruppe bilden, die mit der Gruppe $\mathfrak{h}^n$ isomorph ist. n bedeutet dabei den Index von A, $\mathfrak{h}^n$ die Gruppe der n-ten Potenzen aller Elemente der (absoluten) Idealklassengruppe $\mathfrak{h}$ des Zentrums Z von A.

Zur Orientierung werfen wir zunächst einen kurzen Blick auf den kommutativen Spezialfall: Ist die Algebra A kommutativ (also Körper), so sind zwei Ideale der Hauptordnung $\mathfrak{O}$ von A bekanntlich dann und nur dann äquivalent, wenn sie als $\mathfrak{O}$-Moduln isomorph sind [18]), eine Aussage, die ja auch in dem Strukturssatz von E. Steinitz (DM, § 4) als Spezialfall ($k = 1$, $\mathfrak{E} = 0$) enthalten ist. Die Idealklassen von A können also auch als die Systeme untereinander isomorpher Ideale erklärt werden [18]), wobei die Ideale als $\mathfrak{O}$-Moduln aufzufassen sind.

Im Nichtkommutativen wird man bei dem Bestreben, den so definierten Klassenbegriff auf die Ideale $\mathfrak{A}_{ij}$ der Maximalordnungen von A zu übertragen, zunächst einen Ring R aufzusuchen haben, der in allen Maximalordnungen von A enthalten ist, und zwei Ideale $\mathfrak{A}_{ij}$, $\mathfrak{B}_{kl}$ äquivalent nennen, wenn sie als R-Moduln isomorph sind. Der nächstliegende Ring mit dieser Eigenschaft ist die Hauptordnung $\mathfrak{z}$ des Zentrums Z von A. Es scheint daher natürlich, die folgende Definition aufzustellen:

Zwei Ideale $\mathfrak{A}_{ij}$, $\mathfrak{B}_{kl}$ heißen *äquivalent*, wenn sie als $\mathfrak{z}$-Moduln isomorph sind. Auf

---

[18]) Ein entsprechender Satz gilt übrigens für die nichtsingulären (vgl. Fußnote 14) Ideale eines beliebigen kommutativen Ringes. Sind zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ eines solchen Ringes $\mathfrak{r}$ äquivalent, gilt also $c_1\mathfrak{a} = c_2\mathfrak{b}$, wo c_1, c_2 Nichtnullteiler von $\mathfrak{r}$ bedeuten, so gibt es zu jedem a aus $\mathfrak{a}$ ein eindeutig bestimmtes $b \in \mathfrak{b}$, derart, daß $c_1 a = c_2 b$ gilt und umgekehrt. Die Zuordnung $a \leftrightarrow b$, die entsteht, wenn jedem $a \in \mathfrak{a}$ das der Gleichung $c_1 a = c_2 b$ genügende $b \in \mathfrak{b}$ zugewiesen wird, zeigt — wie man leicht nachrechnet —, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ als $\mathfrak{r}$-Moduln isomorph sind. Weiß man umgekehrt, daß zwei nichtsinguläre Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ des Ringes $\mathfrak{r}$ als $\mathfrak{r}$-Moduln isomorph sind, so läßt sich die Äquivalenz zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ folgendermaßen beweisen: a sei irgendein Nichtnullteiler und a' ein zweites Element aus $\mathfrak{a}$. Bei der voraussetzungsgemäß existierenden, operatorisomorphen Abbildung von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{b}$ möge etwa a in b und a' in b' übergehen. b ist dann wieder ein Nichtnullteiler von $\mathfrak{r}$, weil aus $cb = 0$ mit $c \neq 0$ sofort $ca = 0$ folgen würde. Weiter muß jede zwischen a und a' bestehende Relation $ac + a'c' = 0$ auch zwischen b und b' gelten: $bc + b'c' = 0$. Hieraus folgt $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ oder $ab' = ba'$. Läßt man a' alle Elemente aus $\mathfrak{a}$ durchlaufen, so ergibt sich die gewünschte Beziehung $b\mathfrak{a} = a\mathfrak{b}$, in der a und b keine Nullteiler von $\mathfrak{r}$ sind.

Grund dieser Äquivalenzrelation zerfällt die Menge der Ideale $\mathfrak{A}_{ij}$ in Klassen, *die Idealklassen* $\mathfrak{Kl}$ *von* A. Das System der mit den Maximalordnungen von A äquivalenten Ideale heißt die *Hauptklasse* der Algebra. (Vgl. Satz 16.) Im Kommutativen gehen diese Begriffe offenbar in die üblichen über. — Ich beweise zunächst

Hilfssatz 2. Zu jedem Ideal $\mathfrak{A}_{ij}$ und einer beliebigen Maximalordnung $\mathfrak{O}_{kk}$ kann stets ein zu $\mathfrak{A}_{ij}$ äquivalentes Ideal gefunden werden, dessen Linksordnung mit der vorgegebenen übereinstimmt.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf ich annehmen, $\mathfrak{A}_{ij}$ sei ein ganzes Ideal, da jedes Ideal mit einem ganzen äquivalent ist, was sich genau wie im kommutativen Spezialfall beweisen läßt. Ist das Ideal $\mathfrak{A}_{ij}$ unzerlegbar, so ist es Teiler eines gleichseitigen Primideals $\mathfrak{P}_{ii}$ von $\mathfrak{O}_{ii}$. Für jedes unzerlegbare Ideal $\mathfrak{B}_{kl}$ (mit der Linksordnung $\mathfrak{O}_{kk}$), das in dem gleichseitigen Primideal $\mathfrak{P}_{kk} = (\mathfrak{O}_{kk}\,\mathfrak{O}_{ii})\,\mathfrak{P}_{ii}(\mathfrak{O}_{kk}\,\mathfrak{O}_{ii})^{-1}$ aufgeht, gilt dann nach Satz 13 $N\mathfrak{A}_{ij} = N\mathfrak{B}_{kl}$. Nach Hauptsatz c ist daher $\mathfrak{B}_{kl}$ zu $\mathfrak{A}_{ij}$ äquivalent, also von der verlangten Beschaffenheit. Ist $\mathfrak{A}_{ij}$ nicht unzerlegbar, so werde $\mathfrak{A}_{ij}$ in unzerlegbare Ideale ($\mathfrak{A}_{ij} = \mathfrak{P}_{i\alpha} \cdot \mathfrak{P}_{\alpha\beta} \cdots \mathfrak{P}_{\lambda j}$) zerlegt. Nach dem bereits bewiesenen Teil des Hilfssatzes gibt es zu $\mathfrak{P}_{i\alpha}$ ein äquivalentes Ideal $\mathfrak{P}_{k\alpha'}$, zu $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}$ ein äquivalentes $\mathfrak{P}_{\alpha'\beta'}$ usw. derart, daß

$$N\mathfrak{A}_{ij} = N\mathfrak{P}_{i\alpha} \cdot N\mathfrak{P}_{\alpha\beta} \cdots N\mathfrak{P}_{\lambda j} = N\mathfrak{P}_{k\alpha'} N\mathfrak{P}_{\alpha'\beta'} \cdots N\mathfrak{P}_{\lambda' l} = N\mathfrak{B}_{kl}$$

gilt, wenn $\mathfrak{P}_{k\alpha'} \cdot \mathfrak{P}_{\alpha'\beta'} \cdots \mathfrak{P}_{\lambda' l} = \mathfrak{B}_{kl}$ gesetzt wird. $\mathfrak{B}_{kl}$ ist wieder zu $\mathfrak{A}_{ij}$ äquivalent und die Linksordnung von $\mathfrak{B}_{kl}$ mit $\mathfrak{O}_{kk}$ identisch.

Zwei Idealklassen $\mathfrak{Kl}_1$, $\mathfrak{Kl}_2$ heißen *multiplizierbar*, wenn in $\mathfrak{Kl}_1$ ein Ideal $\mathfrak{A}_{ij}$ und in $\mathfrak{Kl}_2$ ein Ideal $\mathfrak{B}_{jl}$ so gefunden werden kann, daß die Rechtsordnung von $\mathfrak{A}_{ij}$ mit der Linksordnung von $\mathfrak{B}_{jl}$ übereinstimmt; ist diese Bedingung erfüllt, so werde unter dem Produkt $\mathfrak{Kl}_1\mathfrak{Kl}_2$ die Klasse der mit dem eigentlichen Produkt $\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{B}_{jl}$ äquivalenten Ideale verstanden. Auf Grund des vorausgeschickten Hilfssatzes sind Idealklassen $\mathfrak{Kl}_1$ und $\mathfrak{Kl}_2$ in beliebiger Reihenfolge stets multiplizierbar. Wegen des Hauptsatzes c ist das Produkt $\mathfrak{Kl}_1\mathfrak{Kl}_2$ unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten eindeutig bestimmt. Die Hauptklasse spielt bei der Klassenmultiplikation offenbar die Rolle der Einheit. Außerdem existiert zu jeder Klasse $\mathfrak{Kl}$ eine reziproke $\mathfrak{Kl}^{-1}$, die mit $\mathfrak{Kl}$ multipliziert zur Hauptklasse wird; ist nämlich $\mathfrak{A}_{ij}$ irgendein Repräsentant von $\mathfrak{Kl}$, so ist $\mathfrak{Kl}^{-1}$ die Klasse der mit $\mathfrak{A}_{ij}^{-1}$ äquivalenten Ideale. — Aus der letzten Betrachtung ergibt sich

Satz 18. *Die Idealklassen der einfachen Algebra A bilden bei multiplikativer Verknüpfung eine Gruppe* $\mathfrak{H}$, *die wegen der Hauptsätze* a_2 *und* c *mit einer Untergruppe der* (absoluten) *Idealklassengruppe* $\mathfrak{h}$ *von* Z *isomorph und daher sogar abelsch ist.*

Mit Hilfe des Hauptsatzes c läßt sich die mit $\mathfrak{H}$ isomorphe Untergruppe $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{h}$ genau bestimmen: Es ist $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}^n$, d. h. $\mathfrak{h}'$ die Gruppe der n-ten Potenzen der Elemente von $\mathfrak{h}$, wo n den Index von A, also n^2 den Rang von A über dem Zentrum Z bedeutet. Da die Norm eines Ideals $\mathfrak{A}_{ij}$ immer die n-te Potenz eines Ideals von $\mathfrak{z}$ ist (es gilt $N\mathfrak{A}_{ij} = (N_{red}\mathfrak{A}_{ij})^n$), so ist jedenfalls $\mathfrak{h}' \leqq \mathfrak{h}^n$; man hat also nur noch $\mathfrak{h}^n \leqq \mathfrak{h}'$ nachzuweisen.

Definitionsgemäß ist $\mathfrak{h}^n$ die Gesamtheit aller Idealklassen von Z, welche die n-te Potenz wenigstens eines Ideals von $\mathfrak{z}$ enthalten. In diesem Fall enthält die betreffende Idealklasse nach bekannten Sätzen sogar die n-te Potenz eines Ideals $\mathfrak{a}$, das zu einem vorgegebenen Ideal, insbesondere zur Diskriminante von A teilerfremd ist. Ich werde nun zeigen, daß die n-te Potenz eines zur Diskriminante von A teilerfremden Ideals $\mathfrak{a}$ immer Norm eines Ideals $\mathfrak{A}_{ij}$ der Maximalordnungen von A ist, womit die Behauptung bewiesen sein wird, da ja $\mathfrak{h}'$ nach Hauptsatz c gerade aus allen Idealklassen von A besteht, die wenigstens ein Ideal enthalten, das Norm eines Ideals $\mathfrak{A}_{ij}$ ist.

Um die Existenz eines Ideals $\mathfrak{A}_{ij}$ mit der Eigenschaft $N\mathfrak{A}_{ij} = \mathfrak{a}^n$ nachzuweisen, werde $\mathfrak{a}$ in seine Primfaktoren zerlegt: $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_k$. Da mit $\mathfrak{a}$ auch alle Primteiler $\mathfrak{p}_i$ von $\mathfrak{a}$ zur Diskriminante von A teilerfremd sind, sind die Erweiterungsideale $\mathfrak{p}_i \mathfrak{O}_{\alpha\alpha} = \mathfrak{P}_{\alpha\alpha}$ Primideale (unverzweigt), die in genau n unzerlegbare Ideale vom Grade n zerfallen [19]). Ist $\mathfrak{P}_{\alpha_1\alpha_2}$ ein unzerlegbarer Idealteiler von $\mathfrak{P}_{\alpha_1\alpha_1} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{O}_{\alpha_1\alpha_1}$, $\mathfrak{P}_{\alpha_2\alpha_3}$ ein unzerlegbarer Idealteiler von $\mathfrak{P}_{\alpha_2\alpha_2} = \mathfrak{p}_2 \mathfrak{O}_{\alpha_2\alpha_2}$ usw., so wird $N\mathfrak{P}_{\alpha_i\alpha_{i+1}} = \mathfrak{p}_i^n$, also

$$N(\mathfrak{P}_{\alpha_1\alpha_2} \cdot \mathfrak{P}_{\alpha_2\alpha_3} \cdot \mathfrak{P}_{\alpha_3\alpha_4} \cdots \mathfrak{P}_{\alpha_{k-1}\alpha_k}) = \mathfrak{a}^n,$$

womit ein Ideal mit der gesuchten Eigenschaft gefunden ist.

Zusammenfassend erhalten wir schließlich:

Hauptsatz d. *Die Idealklassen einer einfachen Algebra bilden bei multiplikativer Verknüpfung eine abelsche Gruppe* $\mathfrak{H}$, *deren Struktur nur vom Zentrum und dem Index n abhängt. Sie ist mit der Gruppe der n-ten Potenzen aller Elemente der absoluten Idealklassengruppe* $\mathfrak{h}$ *des Zentrums isomorph.*

Bemerkung. Der Idealklassenbegriff eines algebraischen Zahlkörpers läßt sich noch auf eine andere Weise auf die Ideale $\mathfrak{A}_{ij}$ der Maximalordnungen von A übertragen, indem man zwei Ideale $\mathfrak{A}_{ij}$, $\mathfrak{B}_{kl}$ äquivalent nennt, wenn zwei Nichtnullteiler c und d existieren derart, daß $N\mathfrak{A}_{ij} = N(c\,\mathfrak{B}_{kl} d)$ gilt. Die Idealklassen, die sich auf Grund dieser Äquivalenzrelation ergeben, lassen sich genau wie die oben eingeführten unbeschränkt multiplizieren und bilden bei multiplikativer Verknüpfung wieder eine *endliche* abelsche Gruppe $\mathfrak{H}^*$, was man genau so beweist wie Satz 18. Im Spezialfall einer vollständig zerfallenden Algebra ist $\mathfrak{H}^*$ mit der Idealklassengruppe $\mathfrak{h}$ des Zentrums isomorph; im allgemeinen Fall ist die Struktur von $\mathfrak{H}^*$ komplizierter; sie hängt vermutlich noch von der Struktur der zum Zentrum Z gehörigen Brauerschen Algebrengruppe ab.

---

[19]) Vgl. H. Hasse, a. a. O. [16]), Satz 81, S. 534.

Eingegangen 11. Mai 1937.

Zusatz bei der Korrektur (September 1937). Der Brandtsche Äquivalenzbegriff, bei dem zwei Links- (bezw. Rechts-)ideale einer Maximalordnung der Algebra A dann als äquivalent gelten, wenn sie durch rechts- (bezw. links-)seitige Multiplikation mit einem Nichtnullteiler des Systems A auseinander hervorgehen, läßt sich übrigens ebenfalls durch eine Isomorphiebeziehung charakterisieren: *Zwei Linksideale* $\mathfrak{A}_{ij}$ *und* $\mathfrak{B}_{ik}$ *der Ordnung* $\mathfrak{O}_{ii}$ *sind nämlich dann und nur dann im Brandtschen Sinne äquivalent, wenn sie als Moduln mit dem linksseitigen Operatorenring* $\mathfrak{O}_{ii}$ *isomorph sind*; *entsprechendes gilt natürlich auch für Rechtsideale.* Gibt es in A einen Nichtnullteiler c, für den $\mathfrak{A}_{ij} c = \mathfrak{A}_{ik}$ gilt, so erhält man eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{A}_{ij}$ auf $\mathfrak{A}_{ik}$, wenn man jedem a_{ij} aus $\mathfrak{A}_{ij}$ das Produkt $a_{ij} c$ aus $\mathfrak{A}_{ik}$ zuordnet. Umgekehrt läßt sich unter der Voraussetzung, daß sich $\mathfrak{A}_{ij}$ und $\mathfrak{A}_{ik}$ isomorph aufeinander beziehen lassen, leicht die Existenz eines der Bedingung $\mathfrak{A}_{ij} c = \mathfrak{A}_{ik}$ genügenden Nichtnullteilers c von A beweisen. Hierzu werde aus $\mathfrak{A}_{ij}$ ein Nichtnullteiler z des Zentrums von $\mathfrak{O}_{ii}$ und daneben noch irgendein anderes Element a_{ij} ausgewählt. Es ist dann $a_{ij} z - z a_{ij} = 0$. Mit z' und a'_{ij} sollen jetzt diejenigen Elemente aus $\mathfrak{A}_{ik}$ bezeichnet werden, die den Elementen z und a_{ij} bei irgendeiner festen isomorphen Abbildung von $\mathfrak{A}_{ij}$ auf $\mathfrak{A}_{ik}$ entsprechen. Aus $a_{ij} z - z a_{ij} = 0$ folgt dann, wenn man annimmt, daß $\mathfrak{A}_{ij}$ und $\mathfrak{A}_{ik}$ ganz sind, was natürlich keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, $a_{ij} z' - z a'_{ij} = 0$, $a_{ij} z' = z a'_{ij} = a'_{ij} z$, $a_{ij} \dfrac{z'}{z} = a'_{ij}$. Mit z ist offenbar auch z' Nichtnullteiler von $\mathfrak{O}_{ii}$, weil für ein von Null verschiedenes Element b des Ringes $\mathfrak{O}_{ii}$ aus $bz' = 0$ sofort $bz = 0$ hervorgehen würde. Daher ist $c = \dfrac{z'}{z}$ ein Nichtnullteiler von A, der für *alle* a_{ij} aus $\mathfrak{A}_{ij}$ die Gleichung $a_{ij} c = a'_{ij}$, also auch $\mathfrak{A}_{ij} c = \mathfrak{A}_{ik}$ befriedigt.

Das Linienelement als singuläre Punktreihe.

(Zweite Mitteilung.)

Von *E. A. Weiss* in Bonn.

Von S. Lie stammen im wesentlichen zwei verschiedene Abbildungen der Linienelemente der Ebene auf den Punktraum: Eine Abbildung der nicht-orientierten und eine Abbildung der orientierten Linienelemente. Bei beiden Abbildungen treten im Bildraum ein reguläres Nullsystem, in der Grundebene ein ausgezeichnetes Gebüsch von Kurven 2. Ordnung auf, und es entsprechen zwei Punkten, die bezüglich des Nullsystems zu einander konjugiert sind, zwei Linienelemente, die einer Kurve des Gebüsches angehören. Das Gebüsch ist im Falle der Abbildung der orientierten Linienelemente das Gebüsch der Kegelschnitte durch zwei verschiedene, im Falle der Abbildung der nicht-orientierten Linienelemente das Gebüsch der Kegelschnitte durch zwei zusammenfallende Punkte.

In einer ersten Mitteilung [1]) wurde gezeigt: Faßt man die Mannigfaltigkeit der Linienelemente der Ebene als ternär-binäres Gebiet auf und bildet man sie dementsprechend auf die Punkte einer Segreschen $\mathfrak{M}_3^3$ des $\mathfrak{R}_5$ ab, so entsteht die Liesche Abbildung der orientierten Linienelemente, wenn man diese $\mathfrak{M}_3^3$ von einer Bisekante aus auf einen R_3 projiziert. In der vorliegenden Mitteilung werden wir sehen, wie sich Lies Abbildung der nicht-orientierten Linienelemente [2]) ergibt, wenn man $\mathfrak{M}_3^3$ von einer Tangente aus projiziert. Da es sich um eine Ausartung der vorigen Abbildung handelt, fassen wir uns hier kürzer als bisher und gehen insbesondere nicht allen möglichen Spezialfällen einzeln nach.

Der Zweck beider Mitteilungen ist es, den rein projektiven Kern der Lieschen Abbildungen aufzuzeigen.

9. *Projektion der $\mathfrak{M}_3^3$ von einer Tangente aus.* Wie in Nr. **1** bilden wir die Mannigfaltigkeit der singulären Punktreihen der Grundebene eindeutig-umkehrbar auf die Punkte einer Segreschen $\mathfrak{M}_3^3$ des $\mathfrak{R}_5$ ab, bezeichnen in der Grundebene eine Gerade als uneigentlich und versehen sie mit einer Parameterdarstellung. Mit ihrer Hilfe werden wie in Nr. **5** aus den singulären Punktreihen eigentliche und uneigentliche Linienelemente, und diese werden damit eindeutig umkehrbar den Punkten von $\mathfrak{M}_3^3$ zugeordnet.

Auf der uneigentlichen Geraden werde jetzt der Punkt m mit dem Parameter μ ausgezeichnet. Der singulären Punktreihe $(um) \cdot (\mu\tau) = 0$ entspricht dann ein Punkt

[1]) Crelles Journal **177** (1937), S. 116—128. Vgl. auch E. A. Weiss, S. Lies Abbildungen der Linienelemente einer Ebene und die Nicht-Euklidische Geraden-Kugel-Transformation, Monatshefte f. Math. u. Phys. **46**, 1937.

[2]) Mit dieser Ausartung beschäftigt sich die am Anfang der ersten Mitteilung genannte Arbeit von K. Strubecker und die inzwischen erschienene Abhandlung von H. Beck, Über die Lieschen Abbildungen der Linienelemente auf Raumpunkte, Math. Zeitschrift **42** (1937), S. 543—566.

$\mathfrak{P}$ der $\mathfrak{M}_3^3$. Er liegt auf der Fläche $\mathfrak{F}^2$, welche der Mannigfaltigkeit aller auf der uneigentlichen Geraden gelegenen singulären Punktreihen zugeordnet ist. In dem von $\mathfrak{F}^2$ aufgespannten Raume $\mathfrak{R}_3^0$ liegt der Punkt $\mathfrak{Q}$, der die auf der uneigentlichen Geraden ausgezeichnete Punktreihe darstellt. $\mathfrak{Q}$ liegt auf der Tangentialebene von $\mathfrak{F}^2$ im Punkte $\mathfrak{P}$. Die zur Tangente $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ bezüglich $\mathfrak{F}^2$ polare Tangente bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}$. Von dieser Geraden aus projizieren wir $\mathfrak{M}_3^3$ auf einen Raum R_3 allgemeiner Lage.

Die Projektion der erzeugenden Ebenen von $\mathfrak{M}_3^3$ liefert ein Ebenenbüschel; denn die Projektionen sämtlicher Ebenen enthalten die Gerade G, die $\mathfrak{R}_3^0$ aus R_3 ausschneidet (1. Mitt. S. 120). Eine Ausnahme bildet die Ebene $\mathfrak{E}_\mu$. Sie gibt, mit $\mathfrak{G}$ verbunden, einen Raum $\mathfrak{R}_3^1$, der R_3 in einer Treffgeraden L von G schneidet. Da alle erzeugenden Geraden von $\mathfrak{M}_3^3$ die Ebene $\mathfrak{E}_\mu$ treffen, werden sie auf Treffgeraden von L abgebildet. Wir wollen zeigen, daß diese Treffgeraden eine singuläre lineare Kongruenz mit der Leitlinie L bilden.

Betrachten wir das in der Ebene $\mathfrak{E}_\mu$ gelegene Büschel von Geraden mit dem Scheitel $\mathfrak{P}$. Jede seiner Geraden $\mathfrak{V}$ wird von ∞^1 Erzeugenden getroffen, die auf Geraden durch einen und denselben Punkt von L projiziert werden. Sie liegen auch in einer Ebene durch L. Die erzeugenden Treffgeraden von $\mathfrak{V}$ erfüllen nämlich eine Fläche 2. Ordnung, der auch die Erzeugende $\mathfrak{G}_m$ durch den Punkt $\mathfrak{P}$ angehört und die die Gerade $\mathfrak{G}$ in diesem Punkte schneidet. Mit $\mathfrak{G}$ verbunden liefert sie den $\mathfrak{R}_4$, der aus $\mathfrak{R}_3$ die Ebene des Geradenbüschels ausschneidet.

Diese Ebene läuft durch L, weil der $\mathfrak{R}_4$ den Raum $\mathfrak{R}_3^1$ enthält. $\mathfrak{R}_4$ enthält nämlich $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_m$, also die Tangentialebene von $\mathfrak{F}^2$ im Punkte $\mathfrak{P}$ und damit auch die in der Ebene $\mathfrak{E}_\mu$ gelegene Erzeugende $\mathfrak{H}_\mu$ von $\mathfrak{F}^2$, mit $\mathfrak{H}_\mu$ und $\mathfrak{V}$ aber die ganze Ebene $\mathfrak{E}_\mu$.

Es bleibt zu zeigen, daß die Beziehung der Punktreihe L zum Ebenenbüschel L projektiv ist. Zu diesem Zwecke halten wir auf $\mathfrak{M}_3^3$ eine von $\mathfrak{E}_\mu$ verschiedene Ebene $\mathfrak{E}_\sigma$ als Hilfsebene fest. Auf dieser liegt dann ein auf das Geradenbüschel $\mathfrak{V}$ durch die Erzeugenden von $\mathfrak{M}_3^3$ projektiv bezogenes Geradenbüschel $\mathfrak{V}'$ und es gilt:

Punkt P von $L \overline{\wedge}$ Ebene $\mathfrak{G}P \overline{\wedge}$ Gerade $\mathfrak{V} \overline{\wedge}$ Gerade $\mathfrak{V}' \overline{\wedge}$ Verbindungs-$\mathfrak{R}_4$ von $\mathfrak{R}_3^1$ und $\mathfrak{V}' \overline{\wedge}$ Ebene E durch L.

Damit ist gezeigt:

Satz 8. *Durch Projektion der $\mathfrak{M}_3^3$ von einer ihrer Tangenten aus werden die erzeugenden Ebenen von $\mathfrak{M}_3^3$ auf ein Ebenenbüschel projiziert. Einer Ausnahmeebene $\mathfrak{E}_\mu$ entspricht dabei an Stelle einer Ebene des Büschels eine Treffgerade L seiner Achse G. L ist die Leitgerade einer singulären linearen Kongruenz, welche von den Bildgeraden der erzeugenden Geraden von $\mathfrak{M}_3^3$ erfüllt wird.*

Gehen wir von den singulären Punktreihen zu Linienelementen über, so werden die eigentlichen Punkte als Elementvereine auf die Geraden der singulären Kongruenz mit der Leitlinie L abgebildet. Dieser Kongruenz gehört auch die Gerade G als Bildgerade aller ∞^1 uneigentlichen Punkte an.

10. *Abbildung der befestigten Parabeln.* Eine Gerade des Bildraumes ist der Schnitt des Bildraumes mit einem durch $\mathfrak{G}$ laufenden $\mathfrak{R}_3$. Ihm entspricht in der Ebene der Linienelemente eine befestigte Parabel, die die uneigentliche Gerade im Punkte m berührt. Als *befestigte Parabel* bezeichnen wir dabei eine Parabel, auf der ein Punkt ausgezeichnet ist. Sie ist der Ort einer Schar von Linienelementen, deren Punktort die Parabel selbst, deren Linienort der auf der Parabel gelegene ausgezeichnete Punkt ist.

Wie im allgemeinen Falle (Nr. 6) kann man nun die befestigten Parabeln in ∞^1 Scharen von je ∞^3 befestigten Parabeln dadurch einteilen, daß man alle befestigten Parabeln zusammenfaßt, die von einer bestimmten Richtung aus befestigt sind, für welche also die Tangenten in den Befestigungspunkten die gleiche Richtung haben. Da man von einem uneigentlichen Punkte aus an eine Parabel nur eine eigentliche Tangente legen kann, findet hier, anders als im allgemeinen Falle, eine Orientierung nicht statt. Ebenso wie im allgemeinen Falle kann man aber, auch hier mit Hilfe der Sylvesterschen Erzeugung, zeigen, daß die von einer bestimmten Richtung aus befestigten Parabeln auf die Geraden eines linearen Komplexes abgebildet werden. So entstehen die ∞^1 linearen Komplexe durch die in Satz 8 genannte singuläre lineare Kongruenz. Einer davon ist singulär und besteht aus den Trefflinien der Geraden L. Seine Geraden entsprechen den in m befestigten Parabeln.

11. *Übergang zu parabolischen Elementvereinen.* Wir halten jetzt eine beliebige, von μ verschiedene Richtung fest und bezeichnen sie als horizontal. Dadurch wird in der Grundebene das System der horizontal-befestigten Parabeln und ihm entsprechend im Bildraum einer der ∞^1 regulären linearen Komplexe des Büschels ausgezeichnet. Wir nennen ihn den Grundkomplex des Bildraumes.

Wir drehen dann jedes eigentliche Linienelement einer horizontal-befestigten Parabel so lange, bis es die Parabel tangiert. Diese, im Gegensatz zum allgemeinen Falle (Nr. 8) ein-eindeutige Transformation ist für jedes Linienelement von der Wahl der durch dieses Linienelement laufenden, horizontal-befestigten Parabel unabhängig, also für eigentliche Linienelemente wohl definiert. Die Richtigkeit dieser letzten Behauptung folgt entweder synthetisch unter Benutzung der Sätze von Pascal und Desargues oder auch analytisch: Die Transformation lautet für die in ihrem Scheitel befestigten Parabeln, die im uneigentlichen Punkte m der y-Achse berühren:

$$p' = 2p\,.$$

Also:

Satz 9. *In der Grundebene zeichne man eine von μ verschiedene Richtung aus und führe eine Drehung aller Linienelemente derart aus, daß die in der gewählten Richtung befestigten Parabeln Elementvereine werden. Setzt man diese Transformation der Linienelemente mit der in Satz 8 beschriebenen Projektion der $\mathfrak{M}_3^3$ zusammen, so erhält man die Liesche Abbildung der nichtorientierten Linienelemente. Dabei werden die im ausgezeichneten Punkte m berührenden Parabeln als Elementvereine auf die Geraden eines regulären linearen Komplexes (Grundkomplex) abgebildet.*

Gerade Linien der Grundebene werden als Orte gleichgerichteter Linienelemente zunächst auf Geraden abgebildet, die in erzeugenden Ebenen von $\mathfrak{M}_3^3$ liegen und dann auf Trefflinien der Geraden G projiziert. Diejenigen unter ihnen, die durch die letzte Linienelementtransformation Elementvereine geworden sind, werden solche Trefflinien von G, die dem linearen Grundkomplexe angehören. Da G der in Satz 8 genannten singulären linearen Kongruenz und damit dem Grundkomplex angehört, bilden diese Trefflinien eine singuläre lineare Kongruenz.

Satz 10. *Bei der in Satz 9 besprochenen Abbildung der nichtorientierten Linienelemente auf die Punkte des Raumes werden die Punkte und Geraden der Grundebene als Elementvereine auf die Geraden der beiden im Grundkomplex enthaltenen singulären linearen Kongruenzen mit den inzidenten Leitlinien L und G abgebildet.*

12. *Kreis- und Parabelturbinen.* Wir untersuchen noch das Bild einer Geraden allgemeiner Lage des Bildraumes. Führt man die Elementtransformation der Nr. 8 auf

einen befestigten Kreis aus, so erhält man, wie eine einfache elementargeometrische Überlegung zeigt, eine orientierte Kasnersche Turbine. Wir wollen daher die Ausartung, die sich hier ergibt, *Parabelturbine* nennen. Eine Parabelturbine entsteht also durch Ausführung der Linienelementtransformation der Nr. **11** auf eine befestigte Parabel.

Handelt es sich um eine Parabel, die im uneigentlichen Punkte m der y-Achse berührt und in der Richtung p_0 befestigt ist, so besteht die Beziehung:

$$p' = p + p_0$$

zwischen dem Richtungsfaktor p' eines Elementes der Parabelturbine und dem Richtungsfaktor p des die Parabel im Punkte des vorgegebenen Elementes berührenden Linienelementes. Hieraus leitet man ab:

Satz 11. *Als Ausartungen der Kasnerschen Kreisturbinen entsprechen bei Lies Abbildungen der nicht-orientierten Linienelemente den Geraden allgemeiner Lage des Bildraumes Parabelturbinen. Punktort ist eine im Punkte m berührende Parabel, Linienort eine aus ihr durch Schiebung in der Richtung m hervorgegangene zweite Parabel.*

Eingegangen am 28. Juni 1937.

Über die Eindeutigkeit der Zerlegung der Permutationen geordneter Elemente.

Von *Franz Denk* in Erlangen.

Durch Herrn Schönhardt bin ich liebenswürdigerweise darauf aufmerksam gemacht worden, daß die — in meiner kürzlich hier erschienenen Arbeit [1]) nur andeutungsweise durchgeführte — Zerlegung *reduzibler* Permutationen in *Primfaktoren* nach der dortigen Darstellung nicht in allen Fällen eindeutig zu sein braucht [2]). Es sei im folgenden eine ausführliche Behandlung der fraglichen Zerlegung nachgeholt und gezeigt, daß — ohne Einschränkung — sich die behauptete Eindeutigkeit aufrecht erhalten läßt, wenn wir nur die a. a. O. [1]), S. 21, im Fall a_2 getroffene Vereinbarung ($P_n = U_1 \times E$) dahin erweitern, daß *jede Sehne E einer* P_n ($n \geqq 2$), *die alle übrigen Sehnen der letzteren schneidet*, ebenfalls *als Faktor* [3]) (und entsprechend *jede Sehne, die keine der übrigen schneidet, als Summand* [4])) behandelt werden soll, so daß also definitionsgemäß auch für elementare Faktoren P_2 und P_2' (vgl. **1**, 1) mit den Einzelsehnen E_1 und E_2 die Zerlegbarkeit

$$(1) \qquad P_2 = E_1 || E_2, \qquad P_2' = E_1 \times E_2 \text{ [5])}$$

angenommen werden kann. —

Die Faktoren lassen sich in primitive, imprimitive und elementare einteilen. Wir fragen zunächst:

1. *Von welcher Art kann ein Primfaktor sein?* Ein primitiver Faktor ist definitionsgemäß immer auch Primfaktor. Das gleiche gilt von einem imprimitiven Faktor, der entweder irreduzibel ist oder der aus Summanden besteht (d. h. für den C' leer ist, vgl. **2**, 1a). Näher zu überlegen sind also nur:

2. *Elementare Faktoren.* Es gibt deren 3 Typen (vgl. **1**, 1), nämlich P_1, P_2, P_2'.

a) Liegt ein *Faktor vom Typ* P_1, also eine Einzelsehne (E) vor, so läßt sich P_n so darstellen:

$$P_n = U_1 \times U_2 = U_1' \times E \times U_2 \quad \text{mit} \quad U_1 = U_1' \times E,$$

d. h. wir haben Fall a_2 (vgl. S. 21) [3]). U_1', U_2 können auch leer sein.

---

[1]) F. Denk, Über den Aufbau der Permutationen geordneter Elemente, Crelles Journal **176** (1936), S. 18—24. Die im folgenden gegebenen Verweise beziehen sich auf die Seiten bzw. Paragraphen dieser Arbeit. — Druckfehlerberichtigung: Im dortigen Titel muß es natürlich „Permutationen" statt „Permutation" heißen. Auf S. 20, Zeile 9 muß es ferner $n+1-i$ statt $n-1-i$ heißen.

[2]) Vgl. auch Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik $\mathbf{62_I}$ (1936), S. 51—52.

[3]) Wir bezeichnen dann E als (Schnitt-)*Achse* (von P_n).

[4]) Wir bezeichnen dann E als (Trenn-)*Achse* (von P_n).

[5]) In gewissem Sinne ließe sich die hier für elementare Permutationen definierte Zerlegbarkeit (1) auch als

Fall a_3) $E_1 + E_2 = P$, E_1, E_2 = Einzelsehnen,

an **2**, 2 (a. a. O. [1]) S. 21) anschließen.

b) *Faktor vom Typ* P_2. Ein Faktor P_2 enthält keinen Teil (keine Sehne), der selbst Faktor sein kann, ist also Primfaktor. (Entsprechend ist P_2' Primsummand.)

c) *Faktor vom Typ* P_2'. Wir setzen:

$$P_n = K_1' \times P_2' \times K_2, \qquad K_1' \times P_2' = K_1.$$

Dann können wir jedenfalls mit Hilfe der eingangs getroffenen Festsetzung die Zerlegung

$$K_1 = K_1' \times E_1 \times E_2$$

ausführen (K_1' kann auch leer sein). —

3. *Eindeutigkeit.* Führen wir jetzt die Zerlegung (vgl. S. 21, Zeile 12 von unten, „usw.") weiter durch, so gelangen wir schließlich zu einem Faktor, der den Punkt 1 enthält und entweder primitiv oder irreduzibel ist oder eine Summe oder den Typ P_2 oder eine Achse darstellt. In allen Fällen führt unser Zerlegungsverfahren eindeutig zu einem Primfaktor, in dem das Element 1 vorkommt. Die weiteren Überlegungen (S. 21) benötigen kaum einer Ergänzung. —

4. *Bemerkung.* Da (*nach Definition*) die Zerlegbarkeit (1) auch in den Fällen gilt, in denen P_2 nicht Faktor (P_2' nicht Summand) eines reduziblen P_n, sondern z. B. maximales Untergeflecht (vgl. 2, 6) eines irreduziblen P_n ist, so können wir folgende Sätze formulieren:

I. *Primkomponenten höchster (oder letzter) Ordnung sind entweder irreduzible oder primitive Unterpermutationen oder Achsen.*

II. (In Abänderung des Ergebnisses 2, 7). *Bestandteile höchster (oder letzter) Ordnung sind entweder primitive Untergeflechte oder Einzelsehnen.*

Eingegangen 23. Januar 1937.

Berichtigung zu der Arbeit [1]):

Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten.

Von *F. K. Schmidt* in Jena.

Es sind zu ersetzen auf S. 225, Zeile 4, die Worte „wenn ν durch eine höhere Potenz von p teilbar ist als μ" durch: „wenn $\binom{\nu}{\mu}$ durch p teilbar ist" und auf S. 236, Zeile 30—31, die Worte „die durch eine höhere Potenz ... und folglich ist" durch: „für die der Binomialkoeffizient $\binom{\nu}{\mu}$ durch p unteilbar ist. Folglich ist dann".

[1]) Dieses Journal **177** (1937), S. 215—237.

Eingegangen 5. Oktober 1937.